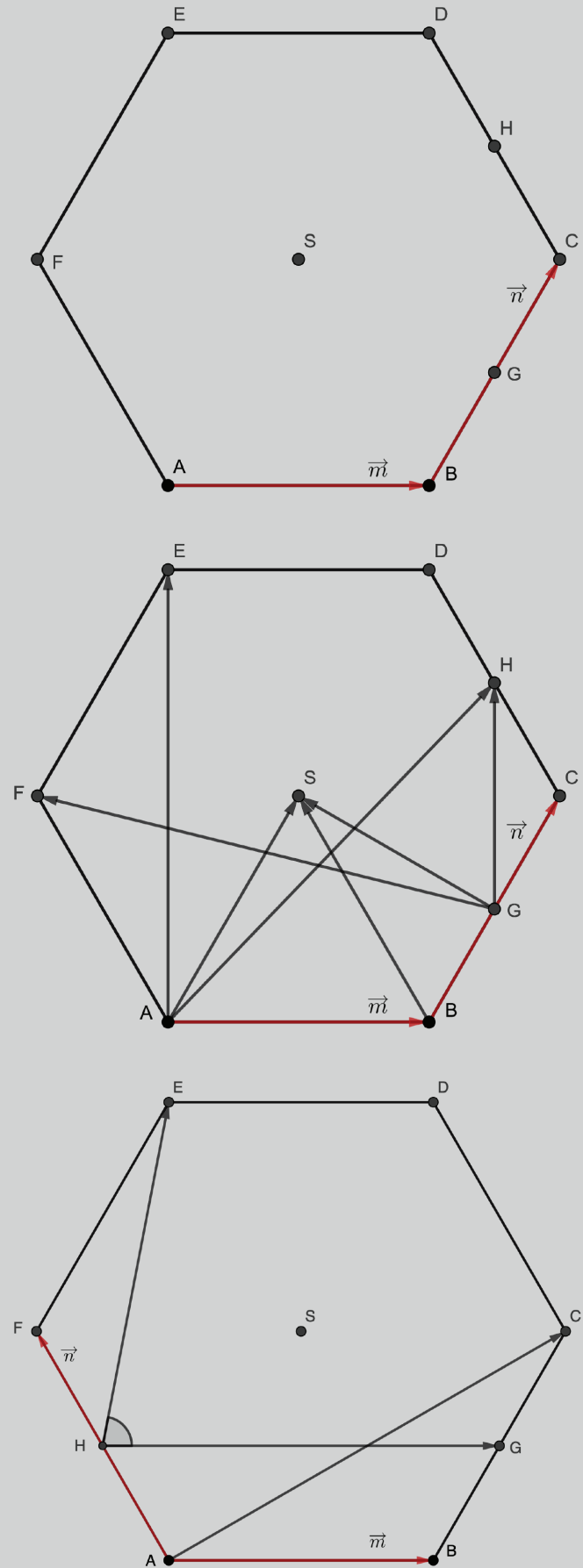


MATEMATIKA ZA STUDENTE ARHITEKTURE I DIZAJNA

Gorana Aras-Gazić • Marija Šimić Horvath • David Tarandek



Sveučilište u Zagrebu Arhitektonski fakultet

Manualia Universitatis studiorum Zagabiensis - Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu

Manualia Universitatis studiorum Zagrabiensis
Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu

Matematika za studente arhitekture i dizajna

Gorana Aras-Gazić
Marija Šimić Horvath
David Tarandek

Af



Sveučilište u Zagrebu
Arhitektonski fakultet
University of Zagreb
Faculty of Architecture

Zagreb, 2024.

IMPRESSUM

Matematika za studente arhitekture i dizajna

Autori

1. doc. dr. sc. Gorana Aras-Gazić, Sveučilište u Zagrebu Arhitektonski fakultet
2. doc. dr. sc. Marija Šimić Horvath, Sveučilište u Zagrebu Arhitektonski fakultet
3. David Tarandek, mag. math., Sveučilište u Zagrebu Arhitektonski fakultet

Recenzenti

1. izv. prof. dr. sc. Slavica Ivelić Bradanović, Sveučilište u Splitu Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije
2. prof. dr. sc. Ema Jurkin, Sveučilište u Zagrebu Rudarsko-geološko-naftni fakultet
3. doc. dr. sc. Iva Kodrnja, Sveučilište u Zagrebu Geodetski fakultet

Lektor

Leda Franić Draganić, prof. hrvatskog jezika

Grafičko oblikovanje

Lucijana Dujić Rastić

Nakladnik

Sveučilište u Zagrebu Arhitektonski fakultet

Za nakladnika

Prof. art. Siniša Justić

Publikaciju je za objavu prihvatio Senat Sveučilišta u Zagrebu, na prijedlog Povjerenstva za sveučilišnu nastavnu literaturu, na sjednici održanoj 15. listopada 2024. (Klasa: 032-01/24-02/08, Urbroj: 251-25-07-01/2-24-5).

ISBN 978-953-8042-90-4

Copyright © 2024., Sveučilište u Zagrebu Arhitektonski fakultet, sva prava pridržana.

SADRŽAJ

0	UVOD	7
1	VEKTORI	9
1.1	Zbrajanje vektora	14
1.2	Množenje realnog broja i vektora	17
1.3	Linearna kombinacija vektora	19
1.4	Baza i koordinatni sustav	26
1.5	Skalarni produkt vektora	32
1.6	Vektorska projekcija	38
1.7	Pravokutni koordinatni sustav	41
1.8	Vektorski produkt vektora	45
1.9	Mješoviti produkt vektora	54
2	ANALITIČKA GEOMETRIJA	57
2.1	Jednadžba ravnine	57
2.2	Jednadžba pravca	59
	DODATAK: Povežimo analitičku i nacrtnu geometriju	77
2.A	Osnovni elementi	77
2.A.1	Točka	77
2.A.2	Pravac	78
2.A.3	Ravnina	78
2.A.4	Presječna dviju ravnina	80
2.A.5	Probodište pravca i ravnine	81
2.A.6	Pravac okomit na ravninu	82
2.B	Metrički zadatci	82
2.B.1	Udaljenost dviju točaka	82
2.B.2	Udaljenost točke od ravnine	83
2.B.3	Udaljenost točke od pravca	83
3	ELEMENTARNE FUNKCIJE	85
4	LIMESI	103
5	DERIVACIJE	109
5.1	Definicija derivacije	109
5.2	Derivacije elementarnih funkcija i pravila deriviranja	113
5.3	L'Hospitalovo pravilo	116
5.4	Rast i pad funkcije. Ekstremi	117
5.5	Zadatci za vježbu	132
6	INTEGRALI	137
6.1	Neodređeni integral	137
6.2	Metoda supstitucije	139
6.3	Određeni integral	141
6.4	Površine ravninskih likova	146
6.5	Volumeni rotacijskih tijela	152

POPIS SLIKA

Slika 1.0.1	Prikaz vektora	9
Slika 1.0.2	Pravac nositelj vektora	10
Slika 1.0.3	Vektori suprotnih orijentacija	10
Slika 1.0.4	Zadani elementi Primjera 1	11
Slika 1.0.5	Kriterij za jednakost vektora	11
Slika 1.0.6	Nanošenje vektora u točku	12
Slika 1.0.7	Nekolinearni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$	12
Slika 1.0.8	Paralelogram i trokut razapeti s dva nekolinearna vektora	13
Slika 1.0.9	Trostrana piramida razapeta s tri nekomplanarna vektora	13
Slika 1.0.10	Četverostrana piramida razapeta s tri nekomplanarna vektora	13
Slika 1.0.11	Paralelopiped razapet s tri nekomplanarna vektora	14
Slika 1.1.1	Zbrajanje vektora pravilom trokuta	14
Slika 1.1.2	Zbrajanje vektora pravilom paralelograma	15
Slika 1.1.3	Zbrajanje nadovezivanjem	15
Slika 1.1.4	Asocijativnost zbrajanja vektora	16
Slika 1.1.5	Komutativnost zbrajanja vektora	16
Slika 1.1.6	Suprotni vektori	16
Slika 1.1.7	Zbrajanje sila	17
Slika 1.1.8	Zbrajanje sila istog smjera	17
Slika 1.2.1	Zadani elementi Zadatka 1	18
Slika 1.2.2	Rješenje Zadatka 1	18
Slika 1.2.3	Rješenje Zadatka 2	19
Slika 1.3.1	$\vec{b} = \alpha \vec{a}, \alpha > 0, \vec{b}' = \alpha' \vec{a}, \alpha' < 0$	20
Slika 1.3.2	$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$	21
Slika 1.3.3	Nekomplanarni vektori $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ i vektor $\vec{d}$	22
Slika 1.3.4	$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$	22
Slika 1.3.5	Rješenje Zadatka 3	23
Slika 1.3.6	Rješenje Zadatka 4	24
Slika 1.3.7	Rješenje Zadatka 5	24
Slika 1.3.8	Zadani elementi Zadatka 6	25
Slika 1.3.9	Rješenje Zadatka 6	26
Slika 1.4.1	Koordinatni sustav	28
Slika 1.4.2	Radijvektor točke T u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$	28
Slika 1.4.3	Vektor u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$	29

Slika 1.4.4	Koordinate polovišta dužine u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$	30	
Slika 1.5.1	Kut između vektora	32	
Slika 1.5.2	Zadani elementi Zadatka 14	34	
Slika 1.5.3	Rješenje Zadatka 14	34	
Slika 1.5.4	Rješenje Zadatka 15	36	
Slika 1.5.5	Zadani elementi Zadatka 16	37	
Slika 1.5.6	Rješenje Zadatka 16	37	
Slika 1.6.1	Vektorska projekcija	39	
Slika 1.6.2	Rješenje Zadatka 17	40	
Slika 1.7.1	Radijvektor u pravokutnom koordinatnom sustavu	41	
Slika 1.7.2	Vektor u pravokutnom koordinatnom sustavu	42	
Slika 1.7.3	Zlatni rez	44	
Slika 1.8.1	Desni koordinatni sustav	46	
Slika 1.8.2	Lijevi koordinatni sustav	46	
Slika 1.8.3	Vektorski produkt vektora	47	
Slika 1.8.4	Geometrijska interpretacija modula vektorskog produkta	47	
Slika 1.8.5	Zadani elementi Zadatka 22	48	
Slika 1.8.6	Rješenje Zadatka 23	52	
Slika 1.8.7	Rješenje Zadatka 24	53	
Slika 1.9.1	Mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$	54	
Slika 2.1.1	Jednadžba ravnine	57	
Slika 2.1.2	Ravnina paralelna s ravninom xy	58	
Slika 2.1.3	Ravnina paralelna s ravninom yz	58	
Slika 2.1.4	Ravnina paralelna s ravninom xz	59	
Slika 2.2.1	Jednadžba pravca	60	
Slika 2.2.2	Rješenje zadatka 28	60	
Slika 2.2.3	Rješenje zadatka 29	61	
Slika 2.2.4	Rješenje zadatka 30	62	
Slika 2.2.5	Rješenje zadatka 31	63	
Slika 2.2.6	Rješenje zadatka 32	64	
Slika 2.2.7	Rješenje zadatka 33	65	
Slika 2.2.8	Rješenje zadatka 34	67	
Slika 2.2.9	Rješenje zadatka 35	68	
Slika 2.2.10	Rješenje zadatka 36	69	
Slika 2.2.11	Rješenje zadatka 37	71	
Slika 2.2.12	Rješenje zadatka 38	72	
Slika 2.2.13	Rješenje zadatka 39	73	
Slika 2.2.14	Rješenje zadatka 40	74	
Slika 2.2.15	Rješenje zadatka 41	75	
Slika 2.A.1	Točka T	78	
Slika 2.A.2	Pravac p	78	
Slika 2.A.3	Prikaz ravnine	79	
Slika 2.A.4	Projicirajuće ravnine	79	

Slika 2.A.5	Pravac u ravnini	80
Slika 2.A.6	Horizontalni i frontalni pravci u ravnini	80
Slika 2.A.7	Presječnica dviju ravnina	81
Slika 2.A.8	Probodište pravca i ravnine	82
Slika 2.A.9	Pravac okomit na ravninu	82
Slika 2.B.1	Udaljenost dviju točaka	83
Slika 2.B.2	Udaljenost točke od ravnine	83
Slika 2.B.3	Udaljenost točke od pravca	84
Slika 3.0.1	Graf konstantne funkcije	87
Slika 3.0.2	Graf linearne funkcije	88
Slika 3.0.3	Graf kvadratne funkcije	89
Slika 3.0.4	Graf eksponencijalne funkcije	90
Slika 3.0.5	Graf logaritamske funkcije	91
Slika 3.0.6	Trigonometrijska kružnica	92
Slika 3.0.7	Graf funkcije sinus	93
Slika 3.0.8	Graf funkcije kosinus	93
Slika 3.0.9	Graf funkcije tangens	94
Slika 3.0.10	Graf funkcije kotangens	95
Slika 3.0.11	Graf funkcije arkus sinus	97
Slika 3.0.12	Graf funkcije arkus kosinus	98
Slika 3.0.13	Graf funkcije arkus tangens	99
Slika 3.0.14	Graf funkcije arkus kotangens	99
Slika 3.0.15	Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$	100
Slika 3.0.16	Graf funkcije $f(x) = x^2 + x - 12$	100
Slika 3.0.17	Graf kvadratne funkcije	101
Slika 4.0.1	Okolina točke a	103
Slika 4.0.2	Limes funkcije f u točki a .	103
Slika 4.0.3	Vrijednost funkcije f u točki a nije jednaka limesu funkcije f u točki a	104
Slika 4.0.4	Limes funkcije u točki	105
Slika 5.1.1	Definicija derivacije	109
Slika 5.1.2	Zadani elementi zadatka 43	111
Slika 5.1.3	Rješenje zadatka 43	112
Slika 5.4.1	Eksponencijalna funkcija	118
Slika 5.4.2	Rast i pad funkcije. Ekstremi.	119
Slika 5.4.3	Graf funkcije $f'(x) = x^2 - x - 6$	121
Slika 5.4.4	Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$	122
Slika 5.4.5	Graf funkcije $f'(x) = 2x^2 - 6x$	123
Slika 5.4.6	Graf funkcije $f(x) = \frac{-2x+3}{x^2}$	123
Slika 5.4.7	Graf funkcije $f'(x) = 3 - x$	124
Slika 5.4.8	Graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x}$	124
Slika 5.4.9	Graf funkcije $f'(x) = x^2 - 4$	125
Slika 5.4.10	Graf funkcije $f(x) = x + \frac{4}{x}$	126
Slika 5.4.11	Graf funkcije $f'(x) = \ln x + 1$	127
Slika 5.4.12	Graf funkcije $f(x) = x \ln x$	127
Slika 5.4.13	Graf funkcije $f'(x) = -x$	128

Slika 5.4.14	Graf funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	128
Slika 5.4.15	Graf funkcije $f'(x) = -x^2 + 3$	129
Slika 5.4.16	Graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+3}$	130
Slika 5.4.17	Rješenje zadatka 58	130
Slika 5.4.18	Rješenje zadatka 59	131
Slika 6.3.1	Površina omeđena grafom funkcije f , pravcima $x = a$, $x = b$ i osi x	142
Slika 6.3.2	Donja i gornja integralna suma	142
Slika 6.3.3	Donja i gornja integralna suma	143
Slika 6.4.1	Površina ravninskog lika	146
Slika 6.4.2	Rješenje zadatka 67	147
Slika 6.4.3	Rješenje zadatka 68	148
Slika 6.4.4	Zadani elementi zadatka 69	149
Slika 6.4.5	Rješenje zadatka 70	150
Slika 6.4.6	Zadani elementi zadatka 71	151
Slika 6.4.7	Zadani elementi zadatka 72	151
Slika 6.5.1	Volumen rotacijskog tijela	152
Slika 6.5.2	Zadani elementi primjera 15	153
Slika 6.5.3	Rješenje primjera 15	153
Slika 6.5.4	Zadani elementi primjera 16	154
Slika 6.5.5	Rješenje primjera 16	155
Slika 6.5.6	Zadani elementi zadatka 74	155
Slika 6.5.7	Rješenje zadatka 74	156
Slika 6.5.8	Zadani elementi zadatka 75	157
Slika 6.5.9	Rješenje zadatka 75	157
Slika 6.5.10	Zadani elementi zadatka 76	158
Slika 6.5.11	Rješenje zadatka 76	158
Slika 6.5.12	Zadani elementi zadatka 77	159
Slika 6.5.13	Rješenje zadatka 77	160

UVOD

Udžbenik *Matematika za studente arhitekture i dizajna* namijenjen je studentima Studija arhitekture i urbanizma te studentima Studija dizajna za učenje i polaganje kolegija Matematika te Matematika 1 i 2 na Arhitektonskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Sadržaj je podijeljen u 6 poglavlja: Vektori, Analitička geometrija, Elementarne funkcije, Limesi, Derivacije i Integrali. Drugo poglavlje ima i dodatak Povežimo analitičku i nacrtanu geometriju u kojem su pojedine zadaće riješene metodama nacrtne geometrije. Dakle, obrađeni su standardni sadržaji koji se predaju na tehničkim fakultetima, ali prilagođeni satnici na Arhitektonskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu te je više stavljen naglasak na primjenu i vizualizaciju sadržaja, a manje na formalni matematički rječnik i dokaze. Svako poglavlje započinje motivacijom, zatim slijedi kratki teorijski uvod te riješeni primjeri i zadatci. Tekst je popraćen s preko 100 slika napravljenih u digitalnom alatu Geogebra. U prvom poglavlju uveden je pojam vektora te su definirane operacije s vektorima i to zbrajanje vektora, množenje realnog broja i vektora te skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora.

U drugom poglavlju koriste se algebarske metode za rješavanje geometrijskih problema. Pomoću vektorskog računa izvodi se jednažba pravca i ravnine te se proučavaju međusobni odnosi i položaji pravaca i ravnina u prostoru. Za svaki zadatak najprije je grafički prikazano prostorno rješenje, a zatim je dano algebarsko rješenje.

U dodatku drugom poglavlju, pojedine zadaće su riješene i metodama iz nacrtne geometrije te studenti mogu usporediti i riješiti iste zadaće na dva načina.

Treće poglavlje posvećeno je osnovnim elementarnim funkcijama. Za svaku funkciju nacrtan je njen graf te su navedena osnovna svojstva. Na kraju ovog poglavlja nalaze se kratki zadatci za vježbu.

U četvrtom poglavlju definiran je pojam granične vrijednosti ili limesa funkcije te su navodena svojstva limesa i pravila za računanje osnovnih limesa.

U petom poglavlju definiran je pojam derivacije te je preko derivacije opisano ponašanje funkcije. Ovdje je također navodeno L'Hospitalovo pravilo za računanje limesa funkcija.

U zadnjem poglavlju definirani su neodređeni i određeni integral te se uče tehnike računanja istih. Ovdje je naglasak stavljen na računanje površina ravninskih likova omeđenih grafovima nekih funkcija te na

računanje volumena rotacijskih tijela koja nastaju rotacijom grafova funkcija oko osi x ili y .

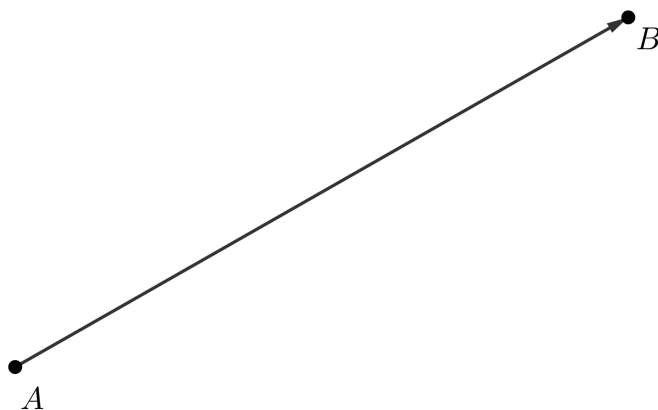
Nadamo se da će ovaj udžbenik približiti matematički sadržaj i olakšati njegovo razumijevanje studentima navedenih profila te omogućiti primjenu u geometrijskim i konstrukcijskim kolegijima.

Na kraju, iskreno se zahvaljujemo našim recezenticama izv. prof. dr. sc. Slavici Ivelić Bradanović, prof. dr. sc. Emi Jurkin i doc. dr. sc. Ivi Kodrnji na konstruktivnim sugestijama i komentarima koji su doprinijeli poboljšanju udžbenika.

Autori

VEKTORI

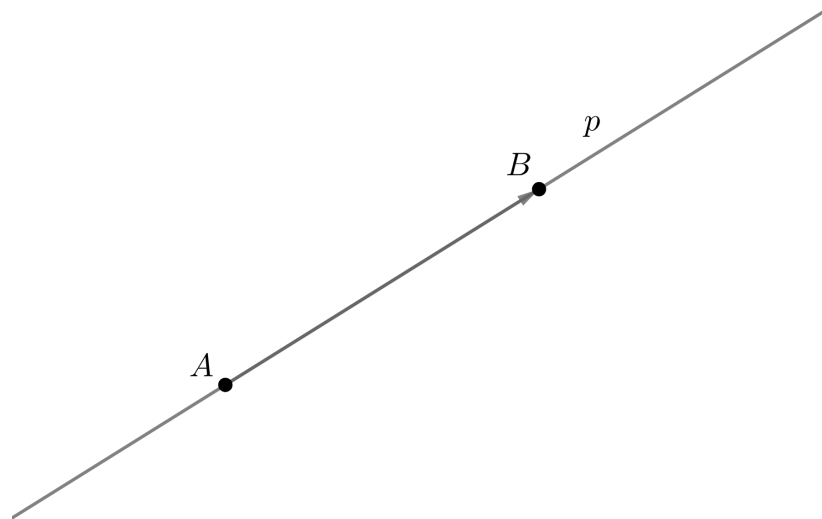
Definicija 1: Orijentiranu dužinu s krajnjim točkama kod kojih razlikujemo početnu i završnu točku zovemo **vektor**. Početna točka je **početak vektora**, a krajnja točka **kraj vektora**.



Slika 1.0.1: Prikaz vektora

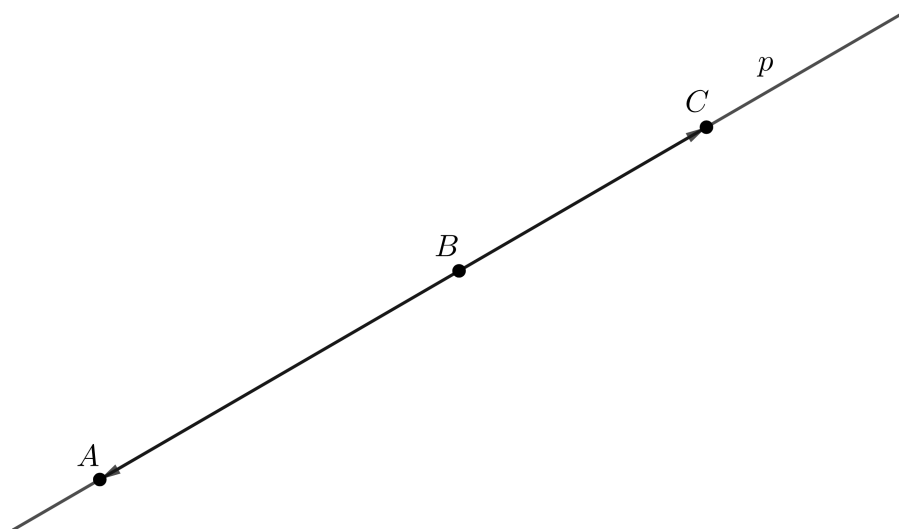
Vektor čiji je početak točka A , a kraj točka B , $A \neq B$, označavat ćemo $\overrightarrow{AB}$. Vektor čiji je početak točka B , a kraj točka A , nazivamo **suprotni vektor** vektora $\overrightarrow{AB}$ i označavamo $\overrightarrow{BA}$. Duljina vektora je udaljenost između njegove početne i krajnje točke i to je pozitivan realan broj kojeg nazivamo **modul** ili **norma vektora** i označavamo $|\overrightarrow{AB}|$. Vidimo da je $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

Smjer vektora je određen pravcem na kojem leži vektor. Pravac p , određen je točkama A i B i sadrži vektor $\overrightarrow{AB}$, pa kažemo da je pravac p **nositelj** vektora $\overrightarrow{AB}$. Za vektore koji leže na paralelnim pravcima kažemo da imaju **isti smjer** ili da su **kolinearni** (oznaka $||$). U suprotnom slučaju govorimo o nekolinearnim vektorima.



Slika 1.0.2: Pravac nositelj vektora

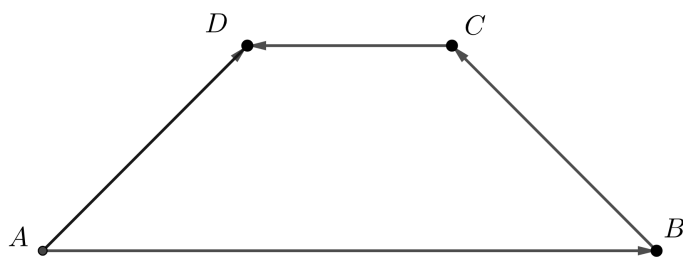
Kako bismo potpuno odredili vektor, osim njegove duljine i smjera moramo poznavati i njegovu **orijentaciju**. Nacrtajmo pravac p te na njemu istaknimo 3 točke A, B i C takve da je točka B između A i C . Vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ su međusobno jednako orijentirani, a vektori $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ su međusobno suprotno orijentirani.



Slika 1.0.3: Vektori suprotnih orijentacija

Definicija 2: Vektor je određen svojom **duljinom**, **smjerom** i **orijentacijom**, odnosno, kažemo da su dva vektora jednaka ako se podudaraju po duljini, smjeru i orijentaciji.

Primjer 1. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ sa slike 1.0.4 imaju isti smjer, ali su suprotno orijentirani i imaju različite module. Vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ imaju različit smjer i orijentaciju, a isti modul.



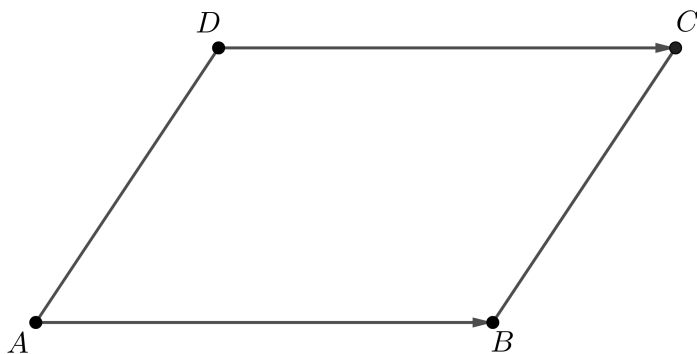
Slika 1.0.4: Zadani elementi Primjera 1

Kriterij za jednakost vektora

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ jednaki su ako i samo ako je četverokut $ABCD$ paralelogram.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ jednaki. Tada su im pravci nositelji paralelni i vrijedi da je $|AB| = |DC|$, a to je dovoljno da četverokut $ABCD$ bude paralelogram.

$\Leftarrow$ Neka je četverokut $ABCD$ paralelogram. Tada su nasuprotne stranice $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ paralelograma paralelne i jednake duljine, a kako su i orijentacije vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ jednake, onda su to jednaki vektori. $\square$

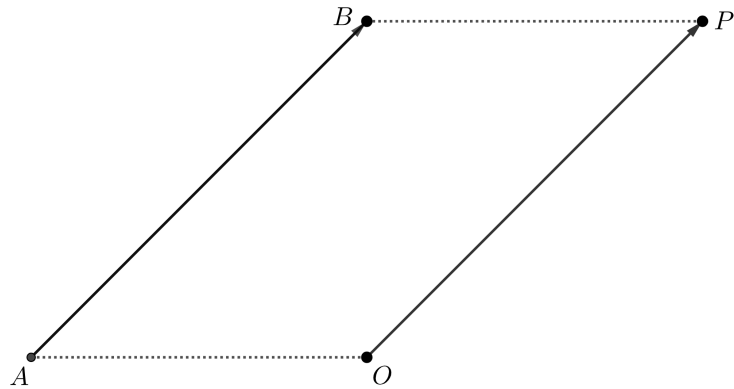


Slika 1.0.5: Kriterij za jednakost vektora

Temeljni stavak o vektorima

Neka je O bilo koja točka prostora i neka je $\overrightarrow{AB}$ vektor. Tada postoji jedinstvena točka P prostora za koju $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

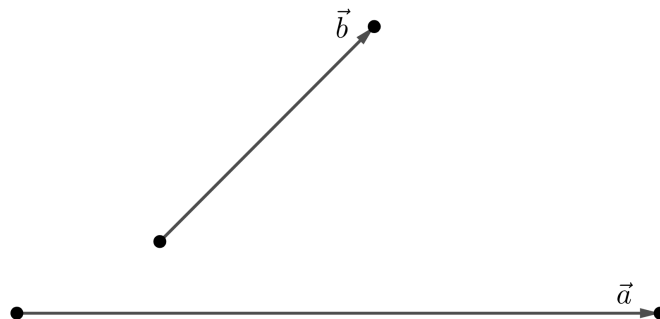
Dokaz: Dokaz ove tvrdnje slijedi iz činjenice da postoji samo jedna točka P prostora takva da je četverokut $OPBA$ paralelogram. Onda je $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. Time smo pronašli vektor jednak početnom koji ima početak u unaprijed zadanoj točki O . $\square$

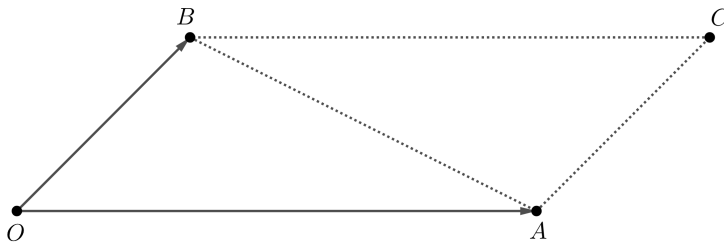


Slika 1.0.6: Nanošenje vektora u točku

S obzirom na gornji stavak, prirodno je vektore označavati bez isticanja početne i krajnje točke, jednim simbolom npr. $\vec{a}$.

Vektor kojemu su početak i kraj u istoj točki zovemo **nulvektor** i označavamo $\vec{0}$. Nulvektor ima duljinu 0 te nema smjer ni orijentaciju. U ravnini postoje najviše dva nekolinearna vektora. Pretpostavimo da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva nekolinearna vektora te ih nanesimo s početkom u točki O. Tada kažemo da vektori $\vec{OA}$ i $\vec{OB}$ **razapinju (određuju) trokut OAB i paralelogram OACB**.

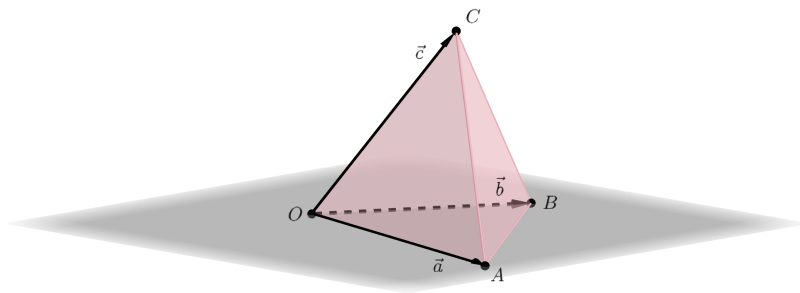
Slika 1.0.7: Nekolinearni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$



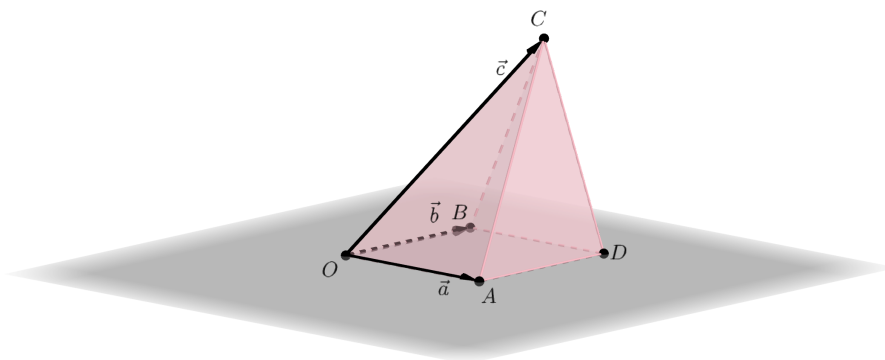
Slika 1.0.8: Paralelogram i trokut razapeti s dva nekolinearna vektora

Komplanarni vektori su vektori koji pripadaju istoj ili paralelnim ravninama. U suprotnom kažemo da su vektori **nekomplanarni**. Očito je da su kolinearni vektori nužno komplanarni.

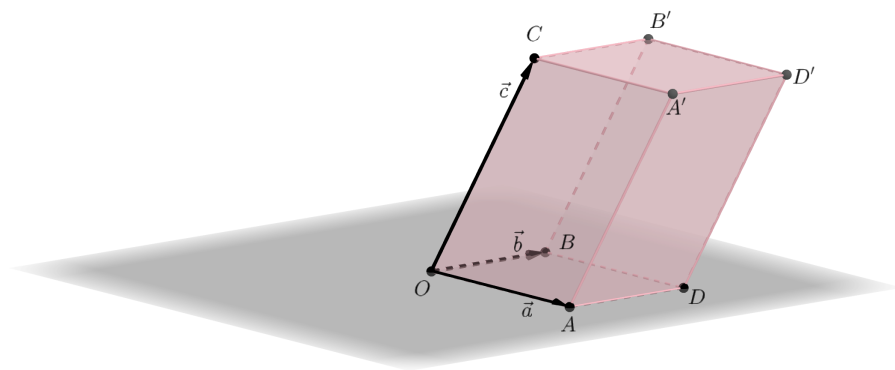
U prostoru postoje najviše tri vektora koji nisu komplanarni. Tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ **razapinju (određuju) trostranu piramidu $OABC$, četverostranu piramidu $OADBC$ i paralelopiped $OADBCA'D'B'$.**



Slika 1.0.9: Trostrana piramida razapeta s tri nekomplanarna vektora



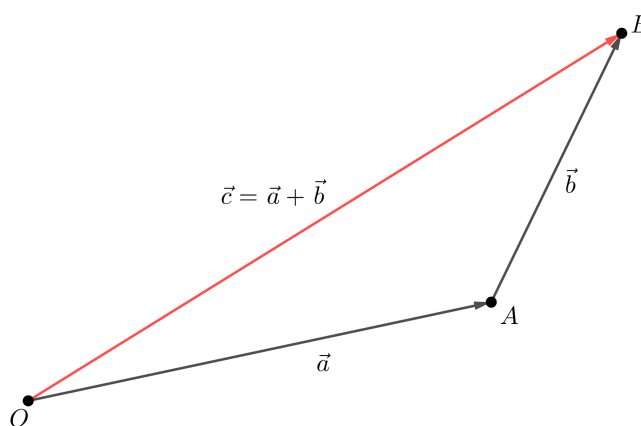
Slika 1.0.10: Četverostrana piramida razapeta s tri nekomplanarna vektora



Slika 1.0.11: Paralelopiped razapet s tri nekomplanarna vektora

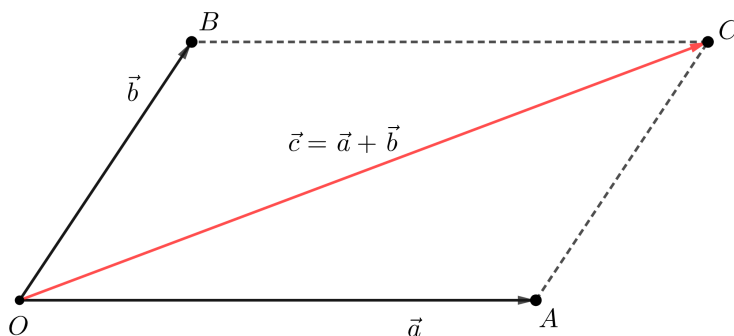
1.1 ZBRAJANJE VEKTORA

Definicija 3: Neka su zadani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ te točke O , A i B takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. **Zbroj vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c} = \overrightarrow{OB}$. Ovaj način zbrajanja vektora naziva se **pravilo trokuta**.



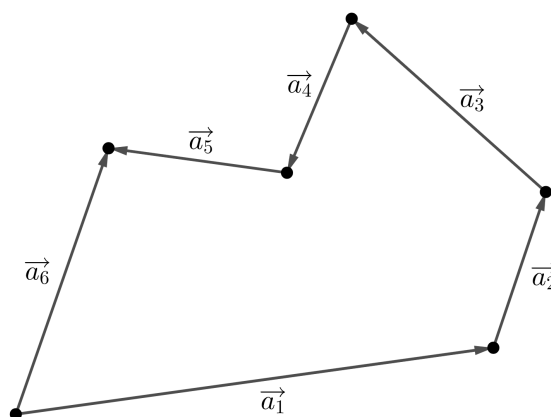
Slika 1.1.1: Zbrajanje vektora pravilom trokuta

Vektore možemo zbrajati i po **pravilu paralelograma**. Zbroj vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ je dijagonala paralelograma $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.



Slika 1.1.2: Zbrajanje vektora pravilom paralelograma

Za zbrajanje više od 2 vektora koristimo pravilo nadovezivanja, vidi sliku 1.1.3. Svaki sljedeći vektor u nizu postavlja se tako da mu je početak u krajnjoj točki prethodnog vektora. Na slici 1.1.3 je $\vec{a}_6 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$.

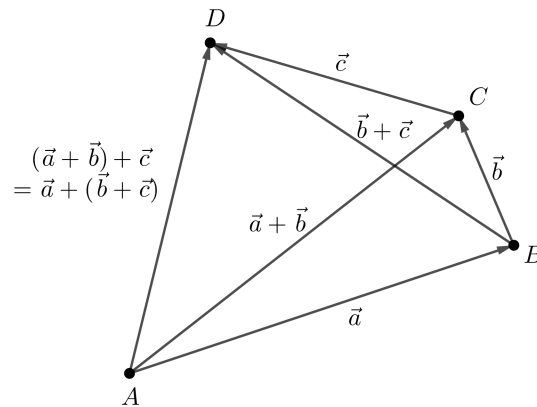


Slika 1.1.3: Zbrajanje nadovezivanjem

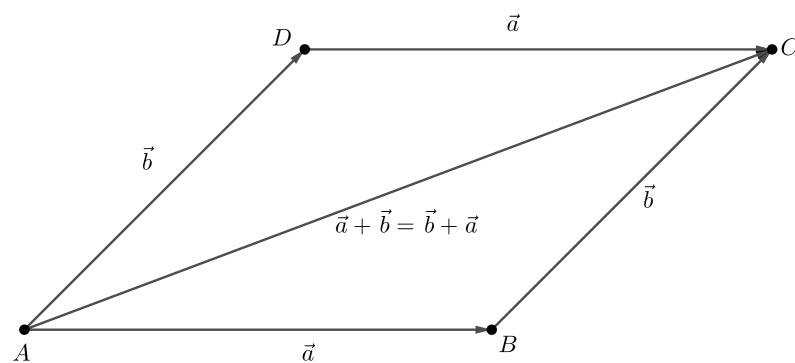
Zbrajanje vektora ima sljedeća svojstva:

1. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
(asocijativnost zbrajanja vektora)
2. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
3. za svaki vektor $\vec{a}$ postoji vektor $\vec{a}_1$ takav da je
 $\vec{a} + \vec{a}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a} = \vec{0}$
 $\vec{a}_1$ - **suprotni vektor** vektora $\vec{a}$ (označavamo ga $-\vec{a}$)
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
(komutativnost zbrajanja vektora).

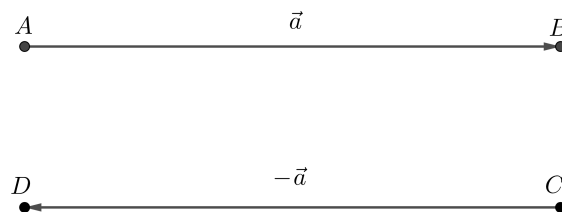
Svojstva zbrajanja vektora su prikazana na sljedećim slikama:



Slika 1.1.4: Asocijativnost zbrajanja vektora



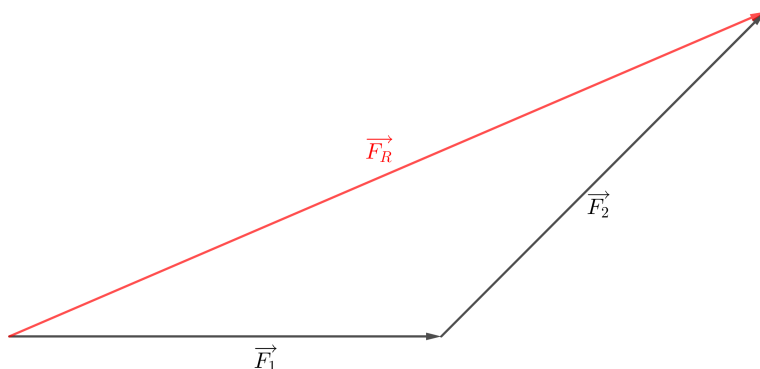
Slika 1.1.5: Komutativnost zbrajanja vektora



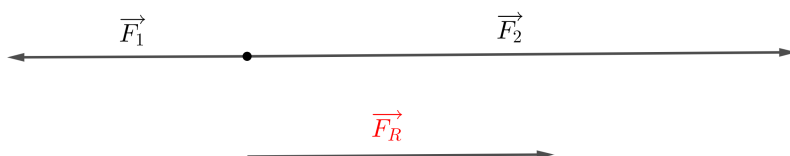
Slika 1.1.6: Suprotni vektori

Oduzimanje vektora je zbrajanje sa suprotnim vektorom. Vektor $\vec{a} + (-\vec{b})$ kraće označavamo $\vec{a} - \vec{b}$ i nazivamo **razlika vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Primjer 2. *Primjer vektorske veličine jest sila jer uz iznos, silu određuju točka u kojoj djeluje (hvatište), pravac na kojem djeluje (smjer), te njezina orijentacija. Općenito ćemo resultantnu silu dobiti kao vektorski zbroj komponenti. Pritom ćemo upotrijebiti pravilo trokuta ili pravilo paralelograma.*



Slika 1.1.7: Zbrajanje sila



Slika 1.1.8: Zbrajanje sila istog smjera

1.2 MNOŽENJE REALNOG BROJA I VEKTORA

Množenjem realnog broja (skalara) λ i vektora $\vec{a}$ dobivamo vektor $\lambda\vec{a}$ zadan na sljedeći način:

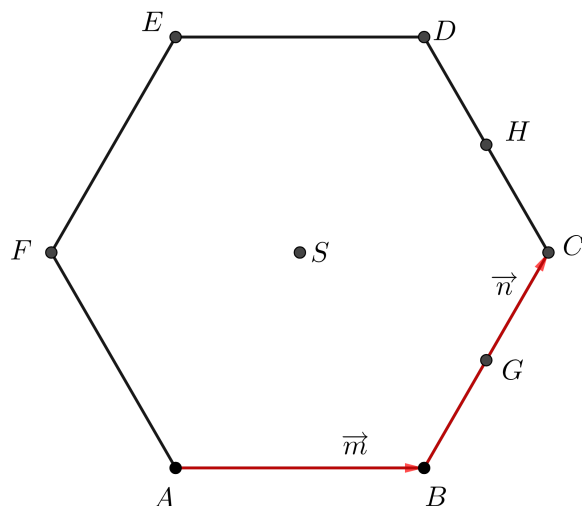
- Ako je $\lambda = 0$ ili je $\vec{a} = \vec{0}$, onda je $\lambda\vec{a} = \vec{0}$
- Ako je $\lambda > 0$, onda je vektor $\lambda\vec{a}$ jednako orijentiran kao i vektor $\vec{a}$, a ako je $\lambda < 0$, vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su suprotno orijentirani, za svaki $\vec{a} \neq \vec{0}$
- Vektora $\lambda\vec{a}$ ima duljinu $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.

Neka su λ i μ realni brojevi te $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori. Operacija množenja skalara i vektora ima sljedeća svojstva:

- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.

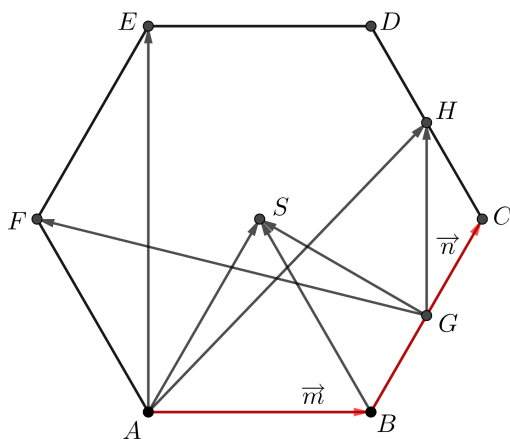
Jedinični vektor vektora $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektor je istog smjera i orijentacije kao vektor $\vec{a}$ čiji je modul 1 i označavamo ga s $\vec{a}_0$. On je jednak $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Ima isti smjer i orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$.

Zadatak 1. Na slici 1.2.1 prikazan je pravilan šesterokut $ABCDEF$ sa središtem u točki S . Neka je G polovište stranice $\overline{BC}$ i H polovište stranice $\overline{CD}$. Označimo vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ s $\vec{m}$ i $\vec{n}$. Izrazite vektore $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{GS}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{GH}$ i $\overrightarrow{GF}$ preko vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$.



Slika 1.2.1: Zadani elementi Zadatka 1

Rješenje:



Slika 1.2.2: Rješenje Zadatka 1

Najprije ćemo naći vektor

$$\vec{BS} = \vec{CD} = \vec{AF} = -\vec{m} + \vec{n}. \text{ Sad je}$$

$$\vec{AH} = \vec{m} + \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{CD} = \vec{m} + \vec{n} + \frac{1}{2}(-\vec{m} + \vec{n}) = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n},$$

$$\vec{GS} = -\frac{1}{2}\vec{n} + \vec{BS} = -\frac{1}{2}\vec{n} - \vec{m} + \vec{n} = -\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n},$$

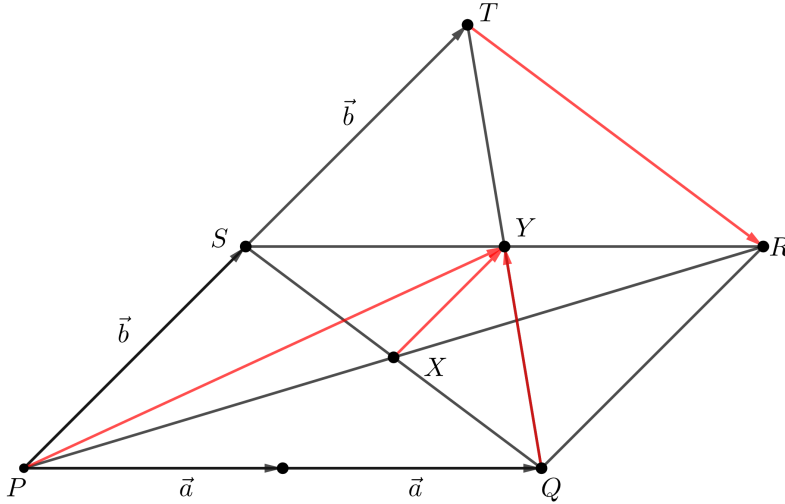
$$\vec{AE} = \vec{m} + 2\vec{BS} = \vec{m} + 2(-\vec{m} + \vec{n}) = -\vec{m} + 2\vec{n},$$

$$\vec{GH} = \frac{1}{2}\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{n} + \frac{1}{2}(-\vec{m} + \vec{n}) = -\frac{1}{2}\vec{m} + \vec{n},$$

$$\vec{GF} = -\frac{1}{2}\vec{n} - \vec{m} + \vec{AF} = -\frac{1}{2}\vec{n} - \vec{m} + (-\vec{m} + \vec{n}) = -2\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}.$$

Zadatak 2. U paralelogramu PQRS je $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{a}$ i $\overrightarrow{PS} = \vec{b}$. Točka T je takva da vrijedi $\overrightarrow{PT} = 2\vec{b}$. Ako se pravci PR i QS sijeku u točki X, a pravci RS i QT u točki Y, prikažite vektore $\overrightarrow{TR}$, $\overrightarrow{PY}$, $\overrightarrow{QY}$ i $\overrightarrow{XY}$ pomoću $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje:



Slika 1.2.3: Rješenje Zadatka 2

Primijetimo najprije da je četverokut SQRT paralelogram, pa se dijagonale SR i QT raspolavljaju.

$$\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SR} = -\vec{b} + 2\vec{a},$$

$$\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SY} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$\overrightarrow{QY} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RY} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XY} &= \overrightarrow{XS} + \overrightarrow{SY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QS} + \vec{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS}) + \vec{a} \\ &= \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}. \end{aligned}$$

1.3 LINEARNA KOMBINACIJA VEKTORA

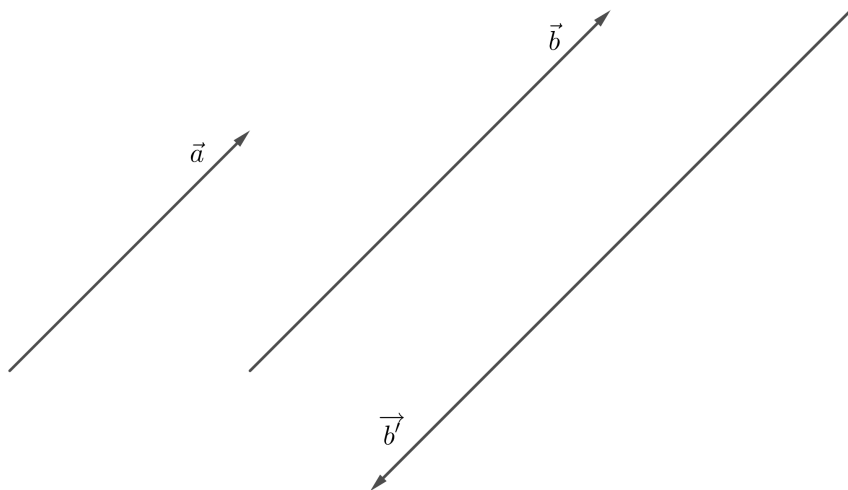
Definicija 4: Ako su $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ vektori i $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalari, onda vektor $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$ nazivamo **linearna kombinacija vektora**

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ s koeficijentima $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Kažemo još da je vektor $\vec{a}$ **rastavljen (razvijen) po vektorima** $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Mi ćemo ovdje promatrati dvodimenzionalan i trodimenzionalan vektorski prostor te ćemo istražiti vezu između algebarskog pojma linearne kombinacije vektora i geometrijskog pojma kolinearnosti i komplanarnosti vektora.

Neka je $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b}$ vektor kolinearan s vektorom $\vec{a}$. Tada postoji jedinstveni realni broj α takav da je $\vec{b} = \alpha \vec{a}$.

Ako je vektor $\vec{b}$ jednako orijentiran kao i vektor $\vec{a}$, onda je $\alpha > 0$. U suprotnom je $\alpha < 0$.

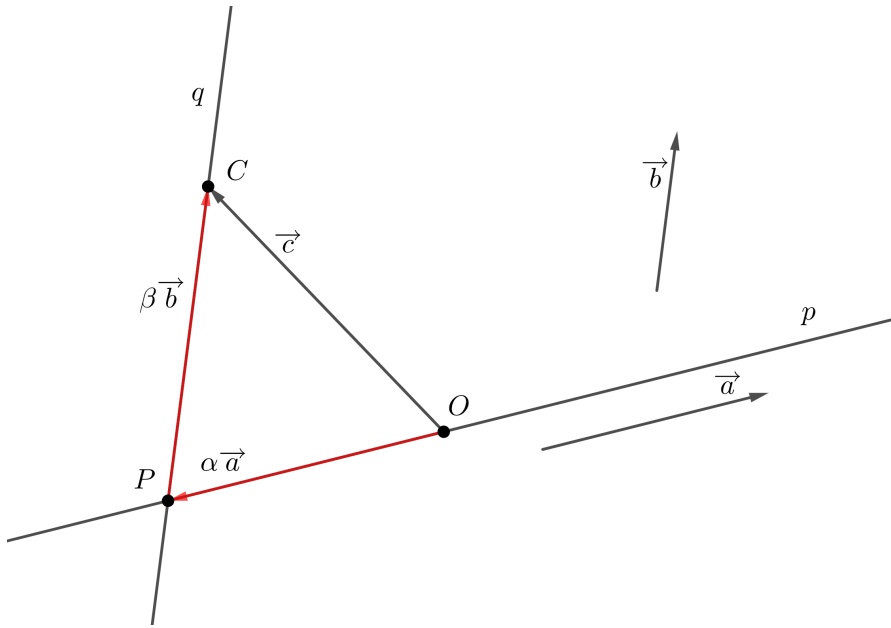


Slika 1.3.1: $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, $\alpha > 0$, $\vec{b'} = \alpha' \vec{a}$, $\alpha' < 0$

Neka je $(\vec{a}, \vec{b})$ uređeni par nekolinearnih vektora. Tada za svaki vektor $\vec{c}$, koji je komplanaran s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, postoji jedinstveni uređeni par realnih brojeva (α, β) takav da je

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Umjesto dokaza pogledajmo sliku 1.3.2:

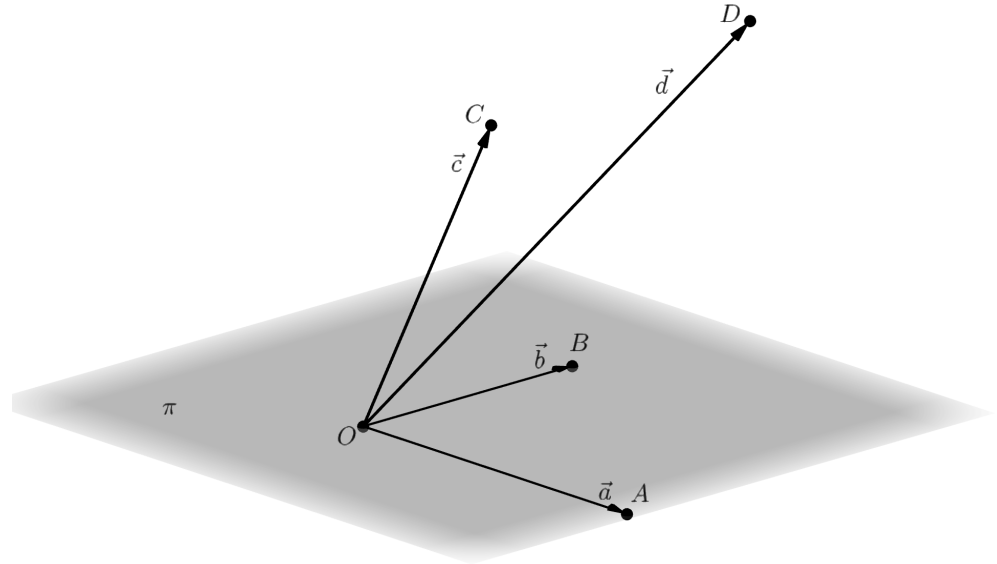
Slika 1.3.2: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

Nanesimo vektor $\vec{c}$ s početkom u točki O te sad imamo da je $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Početkom vektora $\vec{c}$ povucimo pravac p paralelan s vektorom $\vec{a}$, a krajem vektora $\vec{c}$ pravac q paralelan s vektorom $\vec{b}$. Kako pravci p i q nisu paralelni, sijeku se u točki P . Sad je $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$, gdje je vektor $\overrightarrow{OP}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}$ pa se može zapisati kao $\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{a}$, a $\overrightarrow{PC}$ je kolinearan s vektorom $\vec{b}$ pa se može zapisati kao $\overrightarrow{PC} = \beta\vec{b}$. Vektor $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ zovemo **linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ s koeficijentima α i β** .

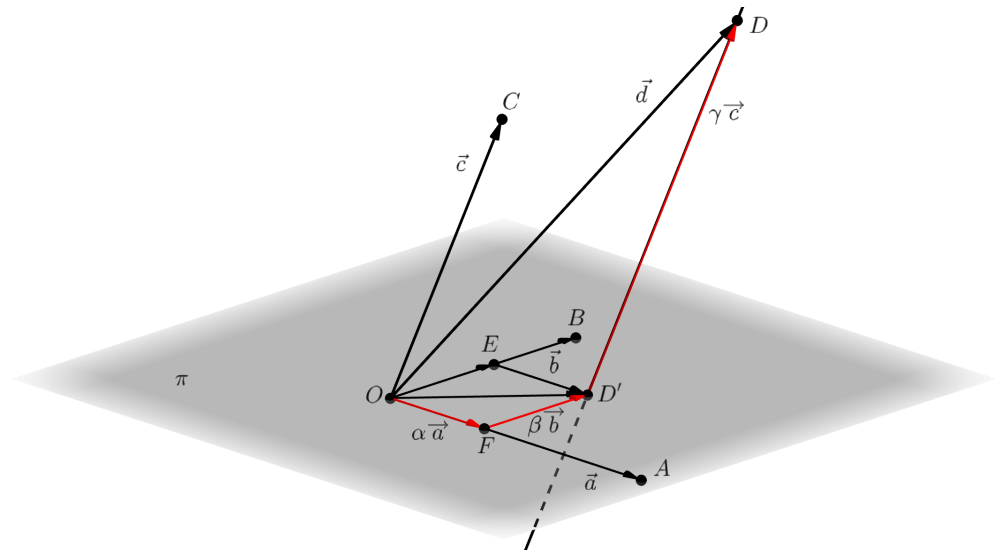
Neka je sad $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekomplanarnih vektora. Tada za svaki vektor $\vec{d}$ postoji jedinstvena uređena trojka realnih brojeva (α, β, γ) takva da je

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Umjesto dokaza pogledajmo sljedeće slike:

Slika 1.3.3: Nekomplanarni vektori $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ i vektor $\vec{d}$

Nanesimo vektore s početkom u istu točku O . Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ i $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Vidimo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ određuju ravninu π te da vektor $\vec{c}$ ne leži u toj ravnini. Točkom D povucimo pravac paralelan s vektorom $\vec{c}$. On ravninu π probada u točki D' .

Slika 1.3.4: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

Sad je $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}$. Po prethodnom je slučaju $\overrightarrow{OD'} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, a kako je vektor $\overrightarrow{D'D}$ kolinearan s vektorom $\vec{c}$, možemo ga napisati kao $\gamma\vec{c}$. Vektor $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ zovemo **linearna kombinacija vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ s koeficijentima α , β i γ** .

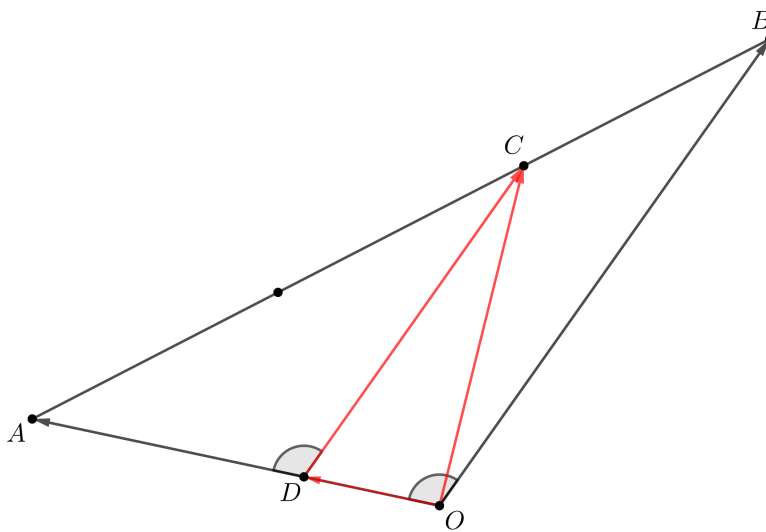
Sad ćemo bez dokaza navesti dva teorema koja nam daju karakterizaciju kolinearnosti i komplanarnosti vektora.

Teorem 1. Dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearna su ako i samo ako postoji broj $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \alpha \vec{a}$.

Teorem 2. Tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarna su ako i samo ako se svaki od njih može prikazati kao linearna kombinacija ostalih dvaju.

Zadatak 3. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru 2 : 1. Prikažite vektor $\vec{OC}$ pomoću vektora $\vec{OA}$ i $\vec{OB}$.

Rješenje:



Slika 1.3.5: Rješenje Zadatka 3

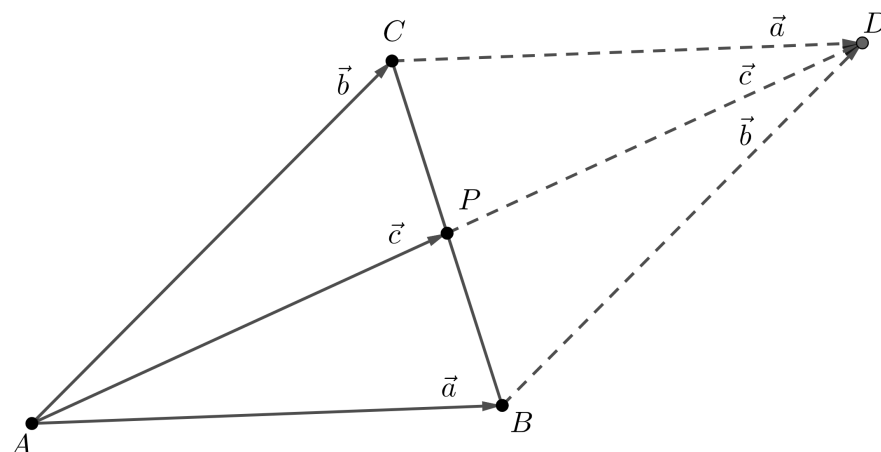
Točkom C povucimo pravac paralelan s vektorom $\vec{OB}$ koji vektor $\vec{OA}$ siječe u točki D . Dobivamo vektor $\vec{DC}$ kolinearan s $\vec{OB}$. Iz sličnosti trokuta ADC i AOB zaključujemo da je $\vec{DC} = \frac{2}{3}\vec{OB}$ i $\vec{DA} = \frac{2}{3}\vec{OA}$, tj. $\vec{OD} = \frac{1}{3}\vec{OA}$. Slijedi da je

$$\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}.$$

Zadatak 4.

Neka su A , B i C vrhovi trokuta, $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AC}$ i neka je $\vec{c} = \vec{AP}$ orijentirana težišnica trokuta. Rastavite vektor $\vec{c}$ u smjeru vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje: Nadopunimo trokut ABC do paralelograma $ABDC$.



Slika 1.3.6: Rješenje Zadatka 4

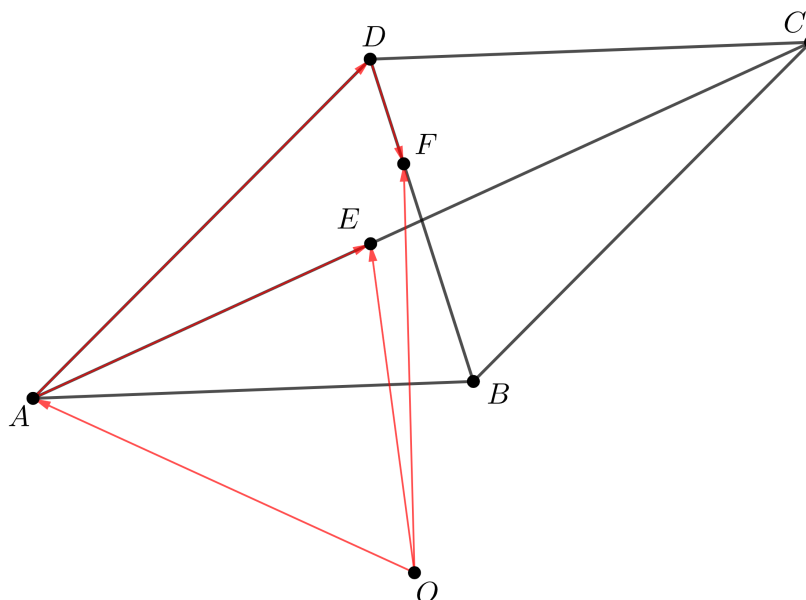
Sad imamo:

$$\begin{aligned} 2\vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\ \Rightarrow \vec{c} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}. \end{aligned}$$

Zadatak 5.

Dokažite da se u paralelogramu dijagonale raspolavljaju.

Rješenje: Označimo s E polovište dužine $\overline{AC}$, a s F polovište dužine $\overline{BD}$. Moramo dokazati da je $E = F$, tj. $\vec{OE} = \vec{OF}$.



Slika 1.3.7: Rješenje Zadatka 5

Sad je

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}),\end{aligned}$$

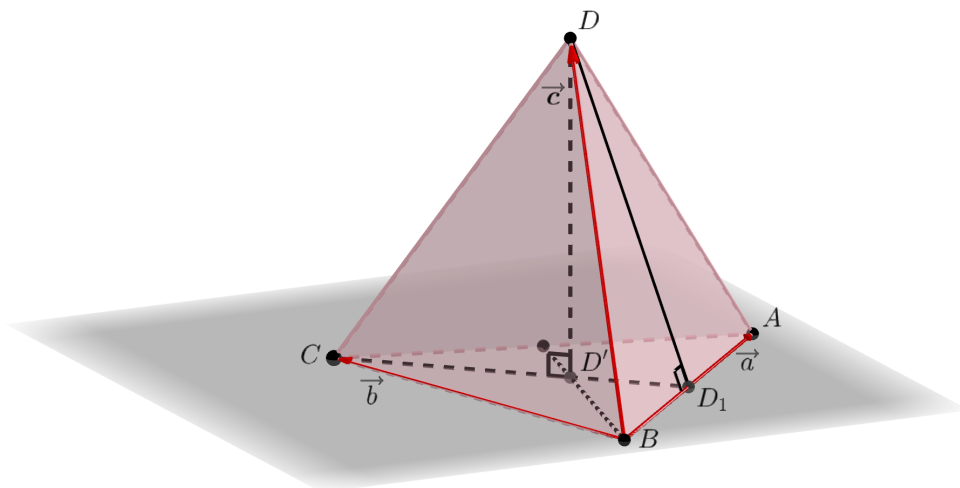
pa je time tvrdnja dokazana.

Zadatak 6.

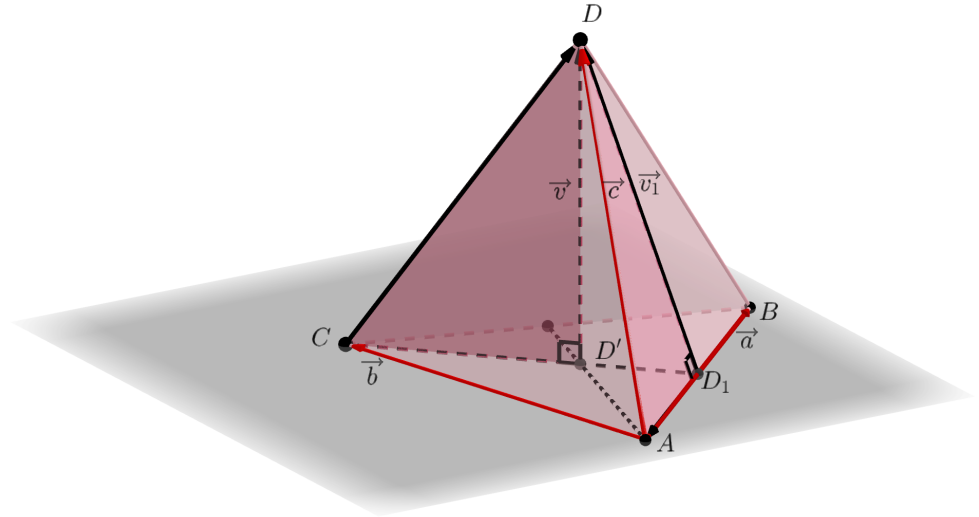
Neka je zadan pravilan tetraedar ABCD. Rastavite

1. vektor visine $\overrightarrow{D'D}$ u smjeru vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$,
2. vektor visine $\overrightarrow{D_1D}$ stranice ABD u smjeru vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

Rješenje:



Slika 1.3.8: Zadani elementi Zadatka 6



Slika 1.3.9: Rješenje Zadatka 6

$$\overrightarrow{D_1C} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b},$$

$$\overrightarrow{CD} = -\vec{b} + \vec{c},$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{CD} \\ &= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) - \vec{b} + \vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c},\end{aligned}$$

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{D_1D} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}.$$

1.4 BAZA I KOORDINATNI SUSTAV

U prethodnom poglavlju vidjeli smo da svaki vektor možemo napisati kao linearnu kombinaciju tri nekomplanarna vektora. Zbog toga kažemo da je trojka nekomplanarnih vektora **baza** u prostoru svih vektora i da je taj prostor **trodimenzionalan**.

Isto tako će uređeni par nekolinearnih vektora biti baza u prostoru svih vektora koji su komplanarni s tim vektorima i taj je prostor **dvodimenzionalan**.

Vektor različit od nulvektora bit će baza u prostoru svih vektora kolinearnih s tim vektorom i taj je prostor **jednodimenzionalan**.

Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza i neka je $\vec{d}$ vektor. Kao što smo već rekli, tada se vektor $\vec{d}$ na jedinstven način može napisati kao

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Uređenu trojku (α, β, γ) nazivamo **trojkom skalarnih komponenta vektora $\vec{d}$ u bazi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$** .

Zadatak 7.

Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza. Odredite $x \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ i $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + 6x\vec{c}$ budu kolinearni.

Rješenje: Kako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ kolinearni, vrijedi

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \alpha \vec{m}, \alpha \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + 6x\vec{c} &= \alpha (\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}),\end{aligned}$$

iz čega slijedi sustav

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \alpha \\ 1 &= 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ 6x &= 3\alpha \Rightarrow x = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Dakle, $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$ i $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{m}$.

Zadatak 8.

Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza i neka su $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{b} + 2\vec{c}$ i $\vec{p} = 2\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c}$ komplanarni vektori. Prikažite vektor $\vec{m}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{n}$ i $\vec{p}$.

Rješenje: Uzmimo da je

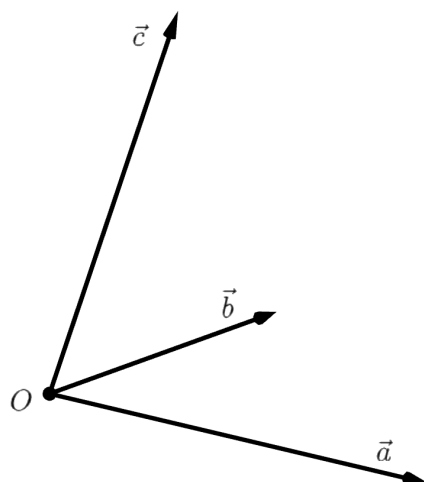
$$\begin{aligned}\vec{m} &= \alpha \vec{n} + \beta \vec{p} \\ \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} &= \alpha (\vec{b} + 2\vec{c}) + \beta (2\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c}).\end{aligned}$$

Iz toga dobivamo sustav

$$\begin{aligned}1 &= 2\beta \\ 2 &= \alpha + 5\beta \\ 1 &= 2\alpha + 4\beta.\end{aligned}$$

Iz prve i druge jednadžbe dobivamo da je $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$. Kako dobiveni α i β zadovoljavaju i treću jednadžbu, slijedi da je $\vec{m} = -\frac{1}{2}\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$.

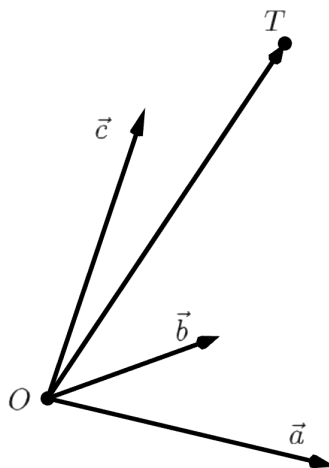
Neka je O točka, a $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza. Uređeni par $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$ zovemo **koordinatni sustav**, a točku O **ishodište koordinatnog sustava**.



Slika 1.4.1: Koordinatni sustav

Neka je $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$ koordinatni sustav. Svaki vektor s početkom u točki O nazivamo **radijvektor**.

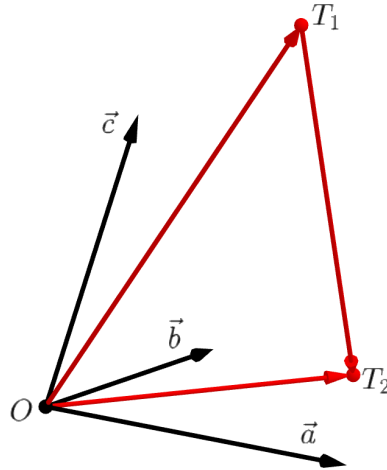
Neka je T točka. Njoj pridružujemo vektor $\vec{OT}$ kojeg nazivamo **radijvektor točke T u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$** .

Slika 1.4.2: Radijvektor točke T u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$

Kako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza, onda se vektor $\vec{OT}$ na jedinstven način može zapisati kao $\vec{OT} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, tj. vektoru $\vec{OT}$ pridružena je trojka (x, y, z) skalarnih komponenta u bazi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Trojku (x, y, z) za koju je $\vec{OT} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ nazivamo **trojkom koordinata točke T u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$** i označavamo $T(x, y, z)$.

Zadatak 9. Neka su (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) trojke koordinata točaka T_1 i T_2 u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$. Zapišite u danom koordinatnom sustavu vektor $\overrightarrow{T_1 T_2}$.

Rješenje:



Slika 1.4.3: Vektor u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$

Neka su $\overrightarrow{OT_1} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$ i $\overrightarrow{OT_2} = x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b} + z_2 \vec{c}$ radijvektori točaka T_1 i T_2 u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$. Sad je vektor

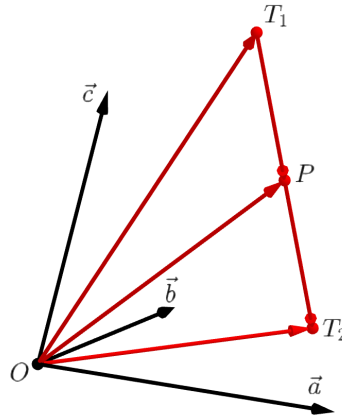
$$\begin{aligned} \overrightarrow{T_1 T_2} &= -\overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{OT_2} \\ &= -(x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}) + (x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b} + z_2 \vec{c}) \\ &= (x_2 - x_1) \vec{a} + (y_2 - y_1) \vec{b} + (z_2 - z_1) \vec{c}. \end{aligned}$$

Zadatak 10. Neka su (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) trojke koordinata točaka T_1 i T_2 u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$. Pokažite da polovište P stranice $\overline{T_1 T_2}$ ima koordinate $P \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$.

Rješenje: Za odrediti koordinate točke P moramo odrediti radijvektor točke P . Sad imamo da je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{T_1 P} = \overrightarrow{OT_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{T_1 T_2} \\ &= x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c} + \frac{1}{2} [(x_2 - x_1) \vec{a} + (y_2 - y_1) \vec{b} + (z_2 - z_1) \vec{c}] \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2} \vec{a} + \frac{y_1 + y_2}{2} \vec{b} + \frac{z_1 + z_2}{2} \vec{c}. \end{aligned}$$

Kako skalarne komponente radijvektora točke u bazi odgovaraju koordinatama te točke, dobivamo da P ima koordinate $P \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$.



Slika 1.4.4: Koordinate polovišta dužine u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$

Zadatak 11. Neka su (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) i (x_3, y_3, z_3) trojke koordinata točaka T_1 , T_2 i T_3 u koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$. Slično kao u prethodnom primjeru pokažite da težište trokuta $T_1T_2T_3$ ima koordinate $T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

Rješenje: Za riješiti zadatak koristimo koordinate polovišta iz prethodnog zadatka te činjenicu da težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 od vrha.

Zadatak 12.

Leže li točke T_1 , T_2 i T_3 , zadane svojim koordinatama u nekom koordinatnom sustavu $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, na jednom pravcu?

1. $T_1(1, -3, 5)$, $T_2(2, 7, 1)$, $T_3(2, -4, 3)$;
2. $T_1(2, 3, -5)$, $T_2(4, 2, -3)$, $T_3(3, \frac{5}{2}, -4)$.

Rješenje: 1. Točke leže na jednom pravcu ako su vektori $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$ kolinearni, a po Teoremu 1 to vrijedi ako i samo ako se vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ može zapisati kao $\overrightarrow{T_1T_2} = \alpha \overrightarrow{T_1T_3}$. Sad imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T_1T_2} &= (2-1)\vec{a} + (7+3)\vec{b} + (1-5)\vec{c} = \vec{a} + 10\vec{b} - 4\vec{c}, \\ \overrightarrow{T_1T_3} &= (2-1)\vec{a} + (-4+3)\vec{b} + (3-5)\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem vektora u gornju jednakost dobivamo

$$\vec{a} + 10\vec{b} - 4\vec{c} = \alpha (\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c})$$

iz čega slijedi sustav

$$\begin{aligned}1 &= \alpha \\ 10 &= -\alpha \\ -4 &= -2\alpha.\end{aligned}$$

Vidimo da ne možemo pronaći α takav da vrijedi gornja jednakost, što znači da vektori nisu kolinearni i da zadane točke ne leže na jednom pravcu.

2. Slično kao pod 1. računamo

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (4-2)\vec{a} + (2-3)\vec{b} + (-3+5)\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c},$$

$$\overrightarrow{T_1T_3} = (3-2)\vec{a} + \left(\frac{5}{2}-3\right)\vec{b} + (-4+5)\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}.$$

Vidimo da je $\overrightarrow{T_1T_2} = 2\overrightarrow{T_1T_3}$, tj. vektori $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$ su kolinearni, pa točke T_1 , T_2 i T_3 leže na istom pravcu.

Zadatak 13.

Leže li točke T_1 , T_2 , T_3 i T_4 , zadane svojim koordinatama u nekom koordinatnom sustavu $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$, u jednoj ravnini?

1. $T_1(2, 1, -2)$, $T_2(4, 4, -1)$, $T_3(4, -1, -1)$, $T_4(4, -6, -1)$;
2. $T_1(-1, 2, 1)$, $T_2(0, -4, 0)$, $T_3(1, 0, -2)$, $T_4(2, -2, 1)$.

Rješenje: 1. Točke T_1 , T_2 , T_3 i T_4 leže u jednoj ravnini ako su vektori $\overrightarrow{T_1T_2}$, $\overrightarrow{T_1T_3}$ i $\overrightarrow{T_1T_4}$ komplanarni, a po Teoremu 2 to vrijedi ako i samo ako se jedan od njih može zapisati kao linearna kombinacija ostala dva. Probajmo sad zapisati $\overrightarrow{T_1T_2} = \alpha\overrightarrow{T_1T_3} + \beta\overrightarrow{T_1T_4}$. Sad imamo

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (4-2)\vec{a} + (4-1)\vec{b} + (-1+2)\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c},$$

$$\overrightarrow{T_1T_3} = (4-2)\vec{a} + (-1-1)\vec{b} + (-1+2)\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c},$$

$$\overrightarrow{T_1T_4} = (4-2)\vec{a} + (-6-1)\vec{b} + (-1+2)\vec{c} = 2\vec{a} - 7\vec{b} + \vec{c}.$$

Uvrštavanjem ovih vektora u gornju jednakost dobivamo

$$2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} = \alpha(2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) + \beta(2\vec{a} - 7\vec{b} + \vec{c}).$$

Izjednačavanjem vektora s lijeve i desne strane dobivamo 3 jednadžbe s 2 nepoznanice:

$$2 = 2\alpha + 2\beta$$

$$3 = -2\alpha - 7\beta$$

$$1 = \alpha + \beta.$$

Iz 2. i 3. jednadžbe dobivamo $\beta = -1$ i $\alpha = 2$. Vidimo da dobiveni α i β zadovoljavaju i prvu jednadžbu. To onda znači da se vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ može zapisati kao $\overrightarrow{T_1T_2} = 2\overrightarrow{T_1T_3} - \overrightarrow{T_1T_4}$ pa su sva tri vektora komplanarna i sve četiri točke leže u jednoj ravnini.

2. Slično kao pod 1. sad imamo

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (0+1)\vec{a} + (-4-2)\vec{b} + (0-1)\vec{c} = \vec{a} - 6\vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{T_1T_3} = (1+1)\vec{a} + (0-2)\vec{b} + (-2-1)\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c},$$

$$\overrightarrow{T_1T_4} = (2+1)\vec{a} + (-2-2)\vec{b} + (1-1)\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b},$$

te dobivamo

$$\vec{a} - 6\vec{b} - \vec{c} = \alpha(2\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}) + \beta(3\vec{a} - 4\vec{b}).$$

Iz gornje jednakosti slijedi sustav

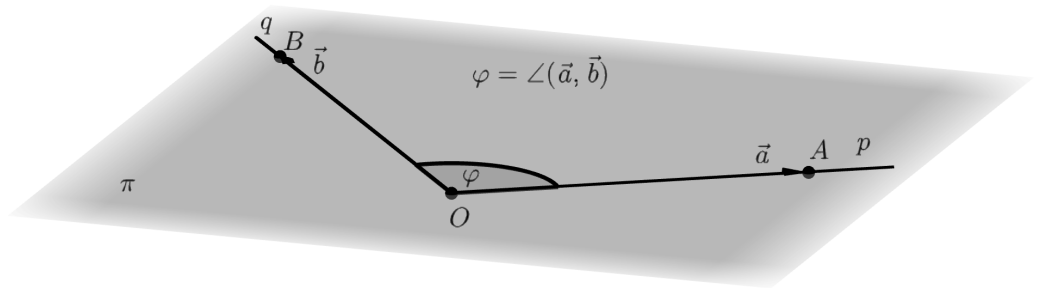
$$\begin{aligned} 1 &= 2\alpha + 3\beta \\ -6 &= -2\alpha - 4\beta \\ -1 &= -3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vraćanjem dobivenog α u prvu jednadžbu dobivamo $\beta = \frac{1}{9}$. Kako dobiveni α i β ne zadovoljavaju drugu jednadžbu, tj. $-6 \neq -\frac{10}{9}$, zaključujemo da se vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ ne može zapisati preko vektora $\overrightarrow{T_1T_3}$ i $\overrightarrow{T_1T_4}$, što znači da vektori nisu komplanarni.

1.5 SKALARNI PRODUKT VEKTORA

Kako bismo definirali skalarni produkt vektora najprije moramo definirati kut između dva vektora. Uzmimo vektore $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ te ih nanesimo s početkom u istu točku O tako da je $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. **Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$** je manji kut od dva kuta koji zatvaraju polupravci p i q na kojima leže vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pa vrijedi da je

$$0 \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi.$$



Slika 1.5.1: Kut između vektora

Definicija 5: Neka su dani vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ i neka je $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. **Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$** je realan broj (skalar)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, onda $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ nije definiran pa definiramo da je

$$\vec{a} \vec{b} = 0.$$

U literaturi često se koristi i oznaka $\vec{a} \cdot \vec{b}$ za skalarni produkt.

Iz definicije slijedi da je

$$\vec{a} \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \vec{a}}$$

te da je

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Za sve vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ te svaki realan broj λ , vrijede sljedeća svojstva skalarnog produkta:

1. $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$ (**komutativnost skalarnog produkta**)
2. $(\lambda \vec{a}) \vec{b} = \lambda (\vec{a} \vec{b})$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}$ (**distributivnost skalarnog produkta prema zbrajanju vektora**)
4. $\vec{a} \vec{a} \geq 0$.

Karakterizacija okomitosti dvaju vektora

Neka je $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti su ako i samo ako je

$$\vec{a} \vec{b} = 0.$$

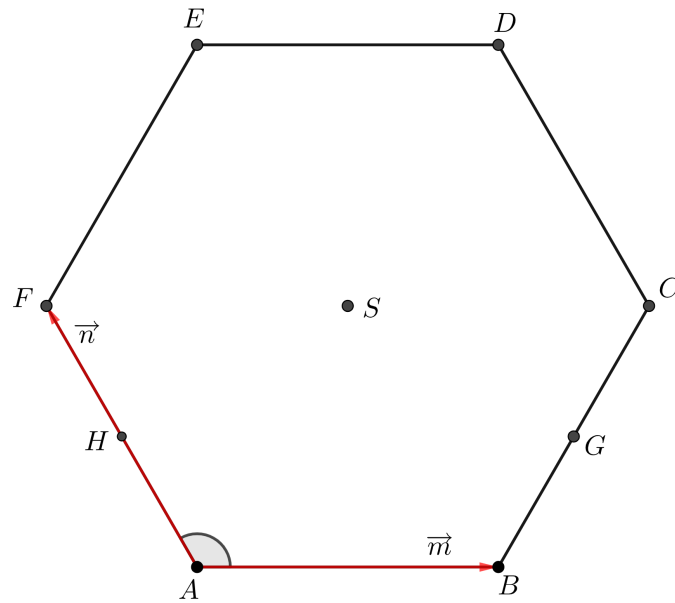
Dokaz: $\Rightarrow$ Neka su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti. Tada je skalarni produkt jednak

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$\Leftarrow$ Neka je sad $\vec{a} \vec{b} = 0$. Kako je $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$, onda mora vrijediti da je $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, iz čega slijedi da je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ tj. $\vec{a} \perp \vec{b}$. $\square$

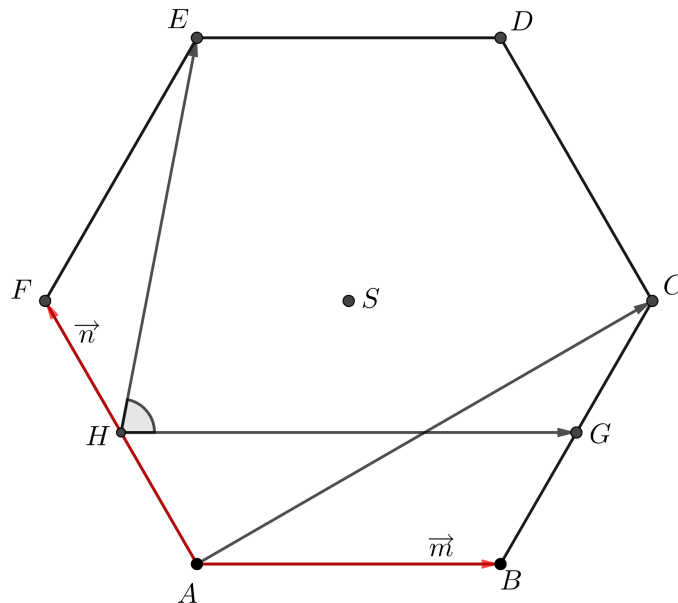
Zadatak 14. Neka je dan pravilan šesterokut $ABCDEF$ stranice duljine 2. Neka je G polovište stranice $\overline{BC}$ i H polovište stranice $\overline{AF}$. Izračunajte duljinu vektora $\vec{AC}$ te kut između vektora $\vec{HG}$ i $\vec{HE}$.

Rješenje: Nacrtajmo pravilan šesterokut $ABCDEF$ sa središtem u točki S te označimo vektore $\vec{AB}$ i $\vec{AF}$ s $\vec{m}$ i $\vec{n}$.



Slika 1.5.2: Zadani elementi Zadatka 14

Sve tražene vektore izrazit ćemo preko vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jer znamo da je $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$ te da je $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}$ pa možemo izračunati skalarni produkt $\vec{m} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -2$.



Slika 1.5.3: Rješenje Zadatka 14

Najprije pronađimo vektor $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = \vec{m} + \vec{n}$.
 Sad je $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{m} + \vec{m} + \vec{n} = 2\vec{m} + \vec{n}$. Onda je

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AC}} = \sqrt{(2\vec{m} + \vec{n})(2\vec{m} + \vec{n})} \\ &= \sqrt{4|\vec{m}|^2 + 4\vec{m}\vec{n} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{16 - 8 + 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Time smo riješili prvi dio zadatka.

Sad ćemo vektore $\overrightarrow{HG}$ i $\overrightarrow{HE}$ izraziti preko vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$, a potom im izračunati module. Dobivamo:

$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\vec{n} + \vec{m} + \frac{1}{2}(\vec{m} + \vec{n}) = \frac{3}{2}\vec{m},$$

$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{m} + \vec{n} = \vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n},$$

pa je

$$|\overrightarrow{HG}| = \sqrt{\overrightarrow{HG}\overrightarrow{HG}} = \sqrt{\frac{9}{4}\vec{m}\vec{m}} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{HE}| &= \sqrt{\overrightarrow{HE}\overrightarrow{HE}} = \sqrt{\left(\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}\right)\left(\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}\right)} \\ &= \sqrt{|\vec{m}|^2 + 3\vec{m}\vec{n} + \frac{9}{4}|\vec{n}|^2} = \sqrt{4 - 6 + 9} = \sqrt{7}. \end{aligned}$$

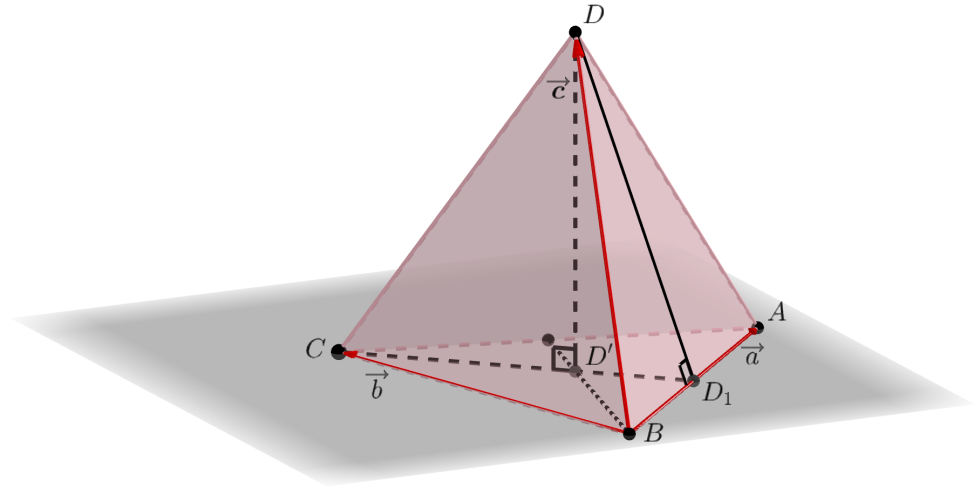
Konačno dobivamo

$$\begin{aligned} \cos\angle(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HE}) &= \frac{\overrightarrow{HG}\overrightarrow{HE}}{|\overrightarrow{HG}||\overrightarrow{HE}|} = \frac{\frac{3}{2}\vec{m}(\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n})}{3\sqrt{7}} = \frac{\frac{3}{2}\vec{m}\vec{m} + \frac{9}{4}\vec{m}\vec{n}}{3\sqrt{7}} \\ &= \frac{\frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{9}{4} \cdot (-2)}{3\sqrt{7}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{7}} \Rightarrow \angle(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HE}) = 79.11^\circ. \end{aligned}$$

Zadatak 15. Neka je dan pravilan tetraedar $ABCD$ duljine stranice 3. Odredite duljinu vektora visine $\overrightarrow{D'D}$ te duljinu vektora visine $\overrightarrow{D_1\vec{D}}$ stranice ABD .

Rješenje:

Koristimo se zadatkom 6 gdje smo vektore $\vec{v} = \overrightarrow{D'\vec{D}}$ i $\vec{v}_1 = \overrightarrow{D_1\vec{D}}$ već izrazili preko vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.



Slika 1.5.4: Rješenje Zadatka 15

Imamo da je

$$\vec{v} = \overrightarrow{D'D} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c},$$

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{D_1D} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}.$$

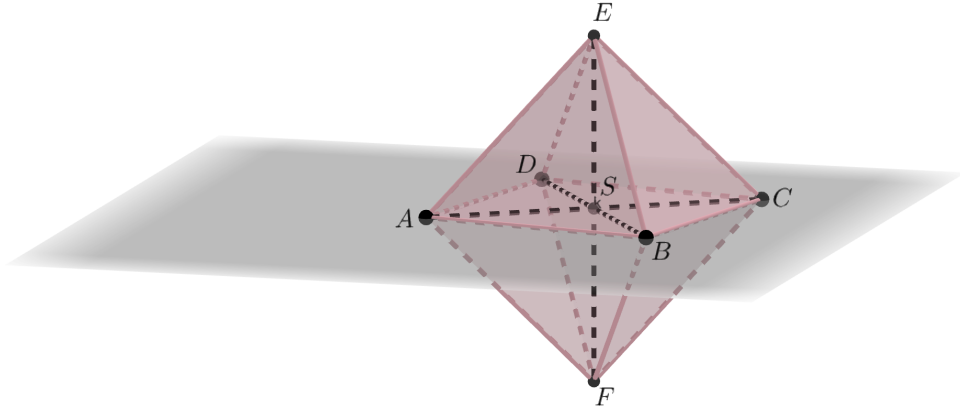
Sad dobivamo

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}\vec{a} \cdot \vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c}} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 9 + \frac{2}{9} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{11 + 1 - 3 - 3} = \sqrt{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1| &= \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} - 3 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 9} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 9} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

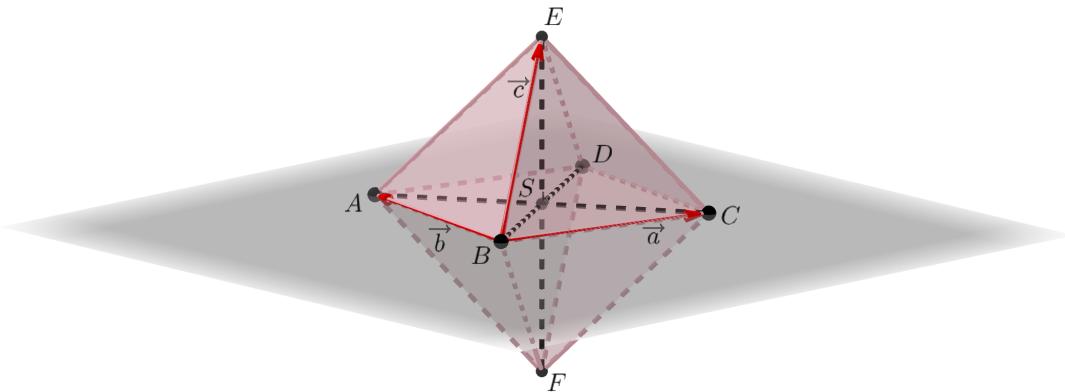
Zadatak 16. Neka je dan pravilan oktaedar $ABCDEF$ duljine stranice 2. Odredite duljinu vektora dijagonale $\overrightarrow{FE}$ te kut između bočnih bridova i ravnine $ABCD$.

Rješenje:



Slika 1.5.5: Zadani elementi Zadatka 16

Uzmimo da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.



Slika 1.5.6: Rješenje Zadatka 16

Sad je

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$$

pa je

$$\overrightarrow{SE} = -\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

i

$$\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{SE} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned}
 |\vec{FE}| &= \sqrt{\vec{FE}\vec{FE}} = \sqrt{(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})} \\
 &= \sqrt{\vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{b} + 4\vec{c}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{a}\vec{c} - 4\vec{b}\vec{c}} \\
 &= \sqrt{4 + 4 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} - 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3}} \\
 &= \sqrt{24 + 0 - 8 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{AS}| &= \sqrt{\vec{AS}\vec{AS}} = \sqrt{\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}\vec{a} + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{b}} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + 4} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 \cos \angle (\vec{AS}, \vec{AE}) &= \frac{\vec{AS}\vec{AE}}{|\vec{AS}||\vec{AE}|} = \frac{\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\vec{c}}{2\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c}}{2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \Rightarrow \angle (\vec{AS}, \vec{AE}) &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Ovaj zadatak smo riješili pomoću skalarnog produkta, ali on se jednostavno može riješiti i korištenjem trigonometrije pravokutnog trokuta.

1.6 VEKTORSKA PROJEKCIJA

Neka je dan uređeni par vektora $(\vec{a}, \vec{b})$. Trebamo naći uređeni par vektora $(\vec{x}, \vec{y})$ takav da je

$$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{x} \parallel \vec{a}, \quad \vec{y} \perp \vec{a} = 0. \quad (1)$$

Na slici 1.6.1 ilustriran je slučaj kad vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni i kad je uvjet $\vec{y} \perp \vec{a} = 0$ ekvivalentan uvjetu okomitosti $\vec{y} \perp \vec{a}$ (jer ako je vektor $\vec{b}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}$, onda je $\vec{b} = \vec{x}$ te je $\vec{y} = \vec{0}$). Uzmimo sad netrivialni slučaj kad je $\vec{a} \neq \vec{0}$. Pretpostavimo da je uređeni par $(\vec{x}, \vec{y})$ rješenje danog problema. Iz uvjeta $\vec{x} \parallel \vec{a}$ i $\vec{a} \neq \vec{0}$ slijedi da postoji realan broj α takav da je $\vec{x} = \alpha \vec{a}$. Sad dobivamo da je

$$\vec{y} = \vec{b} - \vec{x} = \vec{b} - \alpha \vec{a}$$

te

$$0 = \vec{y} \cdot \vec{a} = (\vec{b} - \alpha \vec{a}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \alpha |\vec{a}|^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}.$$

Time smo dokazali da ako problem (1) ima rješenje $(\vec{x}, \vec{y})$, onda je nužno

$$\vec{x} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a}$$

i

$$\vec{y} = \vec{b} - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a}.$$

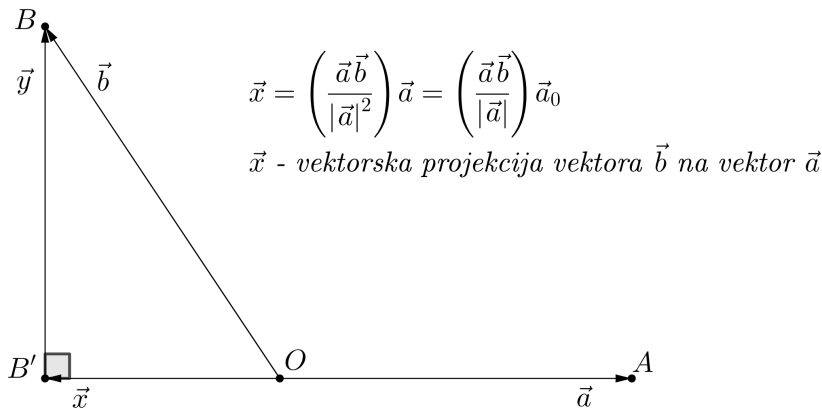
Vektor

$$\vec{x} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \right) \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \right) \vec{a}_0 \quad (2)$$

zovemo **vektorska projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$** . Broj

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}$$

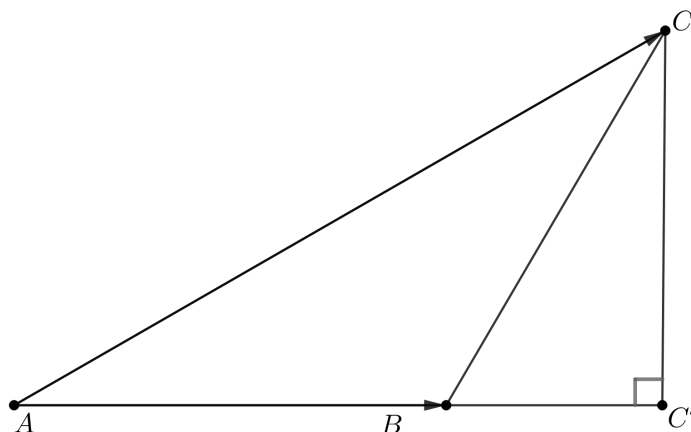
zovemo **skalarna projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$** . Apsolutna vrijednost skalarne projekcije jednaka je duljini vektorske projekcije.



Slika 1.6.1: Vektorska projekcija

Zadatak 17. Neka je dan trokut ABC takav da je $\vec{AB} = \vec{m} - \vec{n}$, $\vec{AC} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. Odredite vektor visine $\vec{CC'}$ te duljinu tog vektora.

Rješenje: Skicirajmo trokut ABC te mu označimo visinu $\vec{CC'}$.



Slika 1.6.2: Rješenje Zadatka 17

Sad vidimo da je vektor $\overrightarrow{AC'}$ vektorska projekcija vektora $\overrightarrow{AC}$ na vektor $\overrightarrow{AB}$ pa idemo ga dobiti po prije izvedenoj formuli:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} &= \frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\overrightarrow{AB} = \frac{(\vec{m} - \vec{n})(2\vec{m} - \vec{n})}{\sqrt{(\vec{m} - \vec{n})^2}}(\vec{m} - \vec{n}) \\ &= \frac{2|\vec{m}|^2 - \vec{m}\vec{n} - 2\vec{n}\vec{m} + |\vec{n}|^2}{|\vec{m}|^2 - 2\vec{m}\vec{n} + |\vec{n}|^2}(\vec{m} - \vec{n}) = \frac{2|\vec{m}|^2 - 3\vec{m}\vec{n} + |\vec{n}|^2}{|\vec{m}|^2 - 2\vec{m}\vec{n} + |\vec{n}|^2}(\vec{m} - \vec{n}) \\ &= \frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 4}{4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 4}(\vec{m} - \vec{n}) = \frac{6}{4}(\vec{m} - \vec{n}) = \frac{3}{2}(\vec{m} - \vec{n}).\end{aligned}$$

Sad je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CC'} &= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} = -(2\vec{m} - \vec{n}) + \frac{3}{2}(\vec{m} - \vec{n}) \\ &= -2\vec{m} + \vec{n} + \frac{3}{2}\vec{m} - \frac{3}{2}\vec{n} = -\frac{1}{2}(\vec{m} + \vec{n}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CC'}| &= \sqrt{\overrightarrow{CC'}\overrightarrow{CC'}} = \sqrt{\frac{1}{4}(\vec{m} + \vec{n})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(|\vec{m}|^2 + 2\vec{m}\vec{n} + |\vec{n}|^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 4)} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

1.7 PRAVOKUTNI KOORDINATNI SUSTAV

U Poglavlju 1.4 uveli smo pojam koordinatnog sustava. Definirali smo ga kao uređeni par $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$, gdje je O bila neka točka koju smo zvali ishodište koordinatnog sustava, a uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tri nekomplanarna vektora činila je bazu koordinatnog sustava.

Sad ćemo kao njegov specijalni slučaj definirati pravokutni ili Kartezijev koordinatni sustav. Njega je uveo René Descartes u 17. stoljeću, čime je započeo razvoj koordinatnih sustava te omogućio proučavanje geometrijskih tijela metodama analitičke geometrije i algebre.

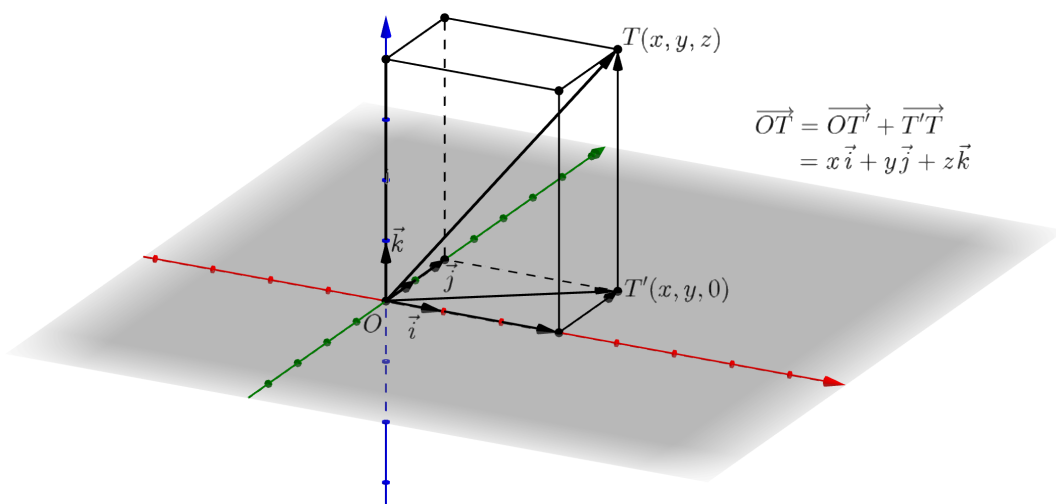
Kažemo da su **vektori** $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ **ortogonalni** ako je $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ i $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ortogonalni, onda nisu komplanarni pa čine bazu. Bazu ortogonalnih vektora zovemo **ortogonalnom bazom**. Ako su vektori ortogonalne baze još i jedinični, takvu bazu zovemo **ortonormirana baza**. Iz ortogonalne baze $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ jednostavno dobivamo ortonormiranu bazu $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|})$.

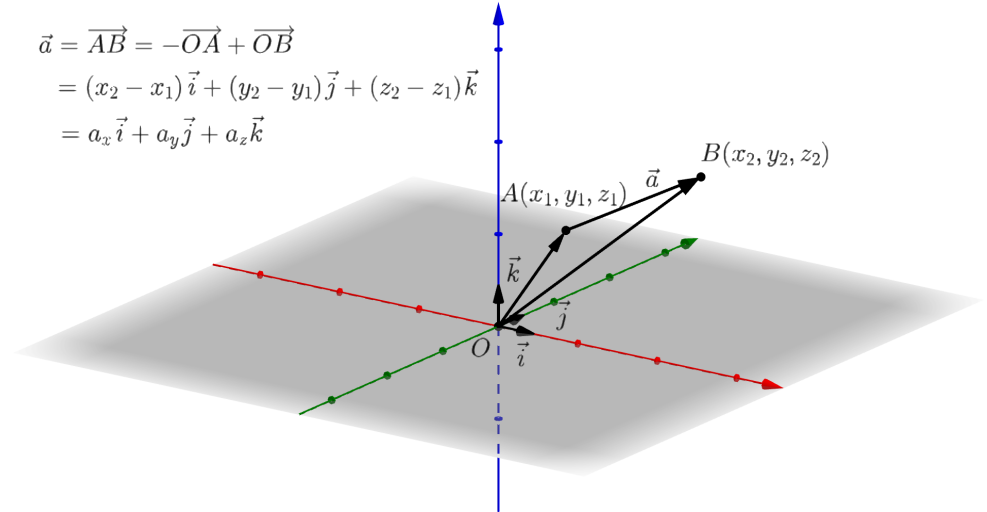
Kažemo da je **koordinatni sustav** $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$ **pravokutan** ako je baza $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ortonormirana. Koordinate točke u pravokutnom koordinatnom sustavu nazivamo **pravokutnim koordinatama točke**. Ortonormiranu bazu označavat ćemo $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, a pravokutni koordinatni sustav $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$.

Pravac točkom O na kojem leži vektor $\vec{i}$ nazivamo x -os ili **apscisa**, pravac točkom O na kojem leži vektor $\vec{j}$ nazivamo y -os ili **ordinata**, a pravac točkom O na kojem leži vektor $\vec{k}$ nazivamo z -os ili **aplikata**. Koordinatne osi određuju **koordinatne ravnine** xy , xz i yz .

Na slikama 1.7.1 i 1.7.2. prikazani su radijvektor $\vec{OT}$ točke T i vektor $\vec{AB}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$.



Slika 1.7.1: Radijvektor u pravokutnom koordinatnom sustavu



Slika 1.7.2: Vektor u pravokutnom koordinatnom sustavu

Neka su sad dani vektori $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. Izračunajmo sad skalarni produkt $\vec{a}\vec{b}$ pomoću komponenata tih vektora u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Odredimo najprije skalarne produkte vektora baze:

$$\vec{i}\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos 0 = 1$$

$$\vec{i}\vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{i}\vec{k} = |\vec{i}||\vec{k}|\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{j}\vec{j} = |\vec{j}||\vec{j}|\cos 0 = 1$$

$$\vec{j}\vec{i} = |\vec{j}||\vec{i}|\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{j}\vec{k} = |\vec{j}||\vec{k}|\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{k}\vec{k} = |\vec{k}||\vec{k}|\cos 0 = 1$$

$$\vec{k}\vec{i} = |\vec{k}||\vec{i}|\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{k}\vec{j} = |\vec{k}||\vec{j}|\cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Iz toga slijedi da je

$$\vec{a}\vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Zadatak 18. Neka su dane točke $A(-1, 4, 5)$, $B(4, -3, 1)$ i $C(-1, 0, 4)$ u pravokutnim koordinatama. Odredite duljinu vektora $\vec{AB}$ te skalarni produkt $\vec{AB}\vec{AC}$. Koliki je kut između vektora $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$?

Rješenje: Odredimo najprije vektore

$$\vec{AB} = (4 + 1)\vec{i} + (-3 - 4)\vec{j} + (1 - 5)\vec{k} = 5\vec{i} - 7\vec{j} - 4\vec{k},$$

$$\vec{AC} = (-1 + 1)\vec{i} + (0 - 4)\vec{j} + (4 - 5)\vec{k} = -4\vec{j} - \vec{k}.$$

Sad je

$$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + (-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 49 + 16} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10},$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17},$$

$$\vec{AB}\vec{AC} = 5 \cdot 0 - 7 \cdot (-4) - 4 \cdot (-1) = 28 + 4 = 32,$$

$$\cos \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB}\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{32}{3\sqrt{10}\sqrt{17}} \Rightarrow \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = 35.1^\circ.$$

Zadatak 19. Odredite realan parametar t takav da vektor $\vec{a} = t\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ bude okomit na vektor $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{k}$.

Rješenje: Parametar t odredit ćemo iz uvjeta okomitosti $\vec{a}\vec{b} = 0$.
Sad imamo

$$t \cdot (-1) - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow t = -2.$$

Sad ćemo izvesti još jednu formulu koja vrijedi samo u pravokutnom koordinatnom sustavu. Neka je dan vektor $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ te označimo s α , β i γ kuteve koje vektor $\vec{a}$ zatvara s vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Slijedi da je

$$a_x = \vec{a}\vec{i} = |\vec{a}|\cos\alpha,$$

$$a_y = \vec{a}\vec{j} = |\vec{a}|\cos\beta,$$

$$a_z = \vec{a}\vec{k} = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

Dobivamo

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2\cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cos^2\gamma,$$

iz čega slijedi da je

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Zadatak 20.

Odredi točku $T(x, y, z)$ takvu da radijvektor točke T ima modul jednak 6, s vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j}$ zatvara kuteve od 45° i 60° te da je aplikata (z-koordinata) točke T negativna. Koliki je kut koji radijvektor točke T zatvara s vektorom $\vec{k}$?

Rješenje: Najprije zapišimo radijvektor točke $T(x, y, z)$, tj. $\vec{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Sad po prethodnim formulama imamo

$$x = \vec{OT} \cdot \vec{i} = 6 \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},$$

$$y = \vec{OT} \cdot \vec{j} = 6 \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

$$\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = -\frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 120^\circ,$$

$$z = \vec{OT} \cdot \vec{k} = 6 \cos 120^\circ = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3,$$

pa točka T ima koordinate $T(3\sqrt{2}, 3, -3)$.

Kažemo da točka $C \in \overline{AB}$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza ako se dulji dio $|\overline{AC}|$ dužine $|\overline{AB}|$ prema kraćem dijelu $|\overline{CB}|$ dužine $|\overline{AB}|$ odnosi kao cijela dužina $|\overline{AB}|$ prema duljem dijelu $|\overline{AC}|$ dužine $|\overline{AB}|$, tj.

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|}.$$

Označimo $a = |\overline{AB}|$, $x = |\overline{AC}|$, $a - x = |\overline{CB}|$ pa dobivamo

$$a : x = x : (a - x)$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Točka C leži na dužini $|\overline{AB}|$ pa je rješenje

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

duljina zlatnog reza $|\overline{AC}|$ dužine $|\overline{AB}|$ duljine a .



$$|\overline{AB}| : |\overline{AC}| = |\overline{AC}| : |\overline{CB}|$$

Slika 1.7.3: Zlatni rez

Zadatak 21. Zadane su točke $A(3, 5, 1)$, $B(-1, 1, 3)$. Nađite točku C koja dužinu $\overline{AB}$ dijeli u omjeru zlatnog reza.

Rješenje:

Odredimo duljinu dužine $|\overline{AB}|$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6.$$

Kako točka C dužinu $\overline{AB}$ dijeli u omjeru zlatnog reza, onda je duljina dužine $|\overline{AC}|$ jednaka

$$|\overline{AC}| = 3(\sqrt{5} - 1).$$

Sad je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}, \\ \overrightarrow{AB}_0 &= \frac{-4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}}{6} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k},\end{aligned}$$

pa je

$$\overrightarrow{AC} = |\overline{AC}| \cdot \overrightarrow{AB}_0 = 3(\sqrt{5} - 1) \left(-\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} \right) = (\sqrt{5} - 1) (-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} + (\sqrt{5} - 1) (-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \\ &= (5 - 2\sqrt{5})\vec{i} + (7 - 2\sqrt{5})\vec{j} + \sqrt{5}\vec{k}.\end{aligned}$$

Točka C ima koordinate $C(5 - 2\sqrt{5}, 7 - 2\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

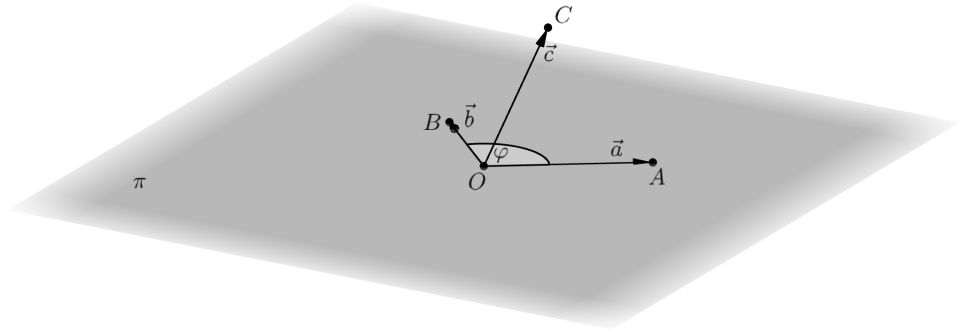
1.8 VEKTORSKI PRODUKT VEKTORA

Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza i neka su O, A, B i C točke za koje je $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ leže u ravnini π , dok vektor $\vec{c}$ i točka C ne pripadaju toj ravnini.

Ako se iz točke C rotacija iz vektora $\vec{a}$ u vektor $\vec{b}$ vidi kao pozitivna rotacija, onda kažemo da $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desna baza, odnosno da je $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$ **desni koordinatni sustav**.

Napomenimo, pozitivna rotacija je rotacija u smjeru obratnom od kazaljke na satu.

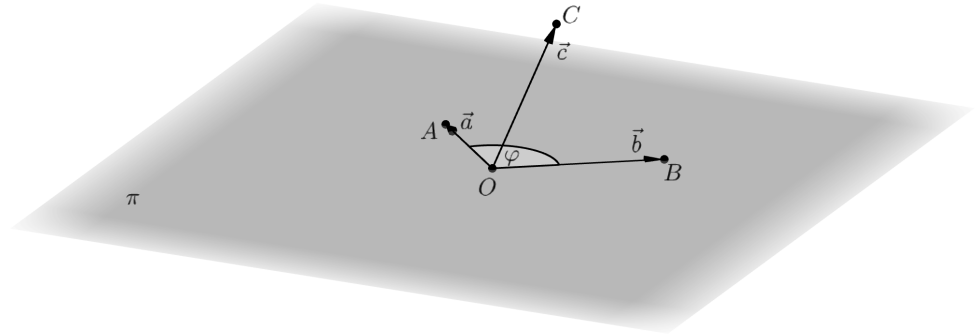
$(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$ - desni koordinatni sustav



Slika 1.8.1: Desni koordinatni sustav

Ako se iz točke C rotacija iz vektora $\vec{a}$ u vektor $\vec{b}$ vidi kao negativna rotacija, onda kažemo da $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ lijeva baza, odnosno da je $(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$ **lijevi koordinatni sustav**.

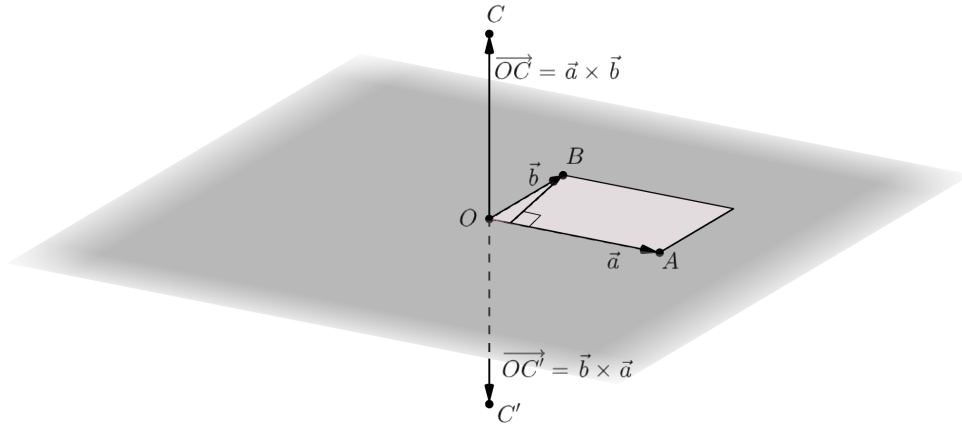
$(O, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$ - lijevi koordinatni sustav



Slika 1.8.2: Lijevi koordinatni sustav

Neka je $(\vec{a}, \vec{b})$ uređeni par vektora i $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. **Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$** je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ definiran na sljedeći način:

1. ako je $\vec{a} \parallel \vec{b}$, onda uzimamo da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
2. ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, onda uzimamo da je $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor određen sljedećim uvjetima:
 - $\vec{a} \times \vec{b}$ je okomit na vektor $\vec{a}$ i na vektor $\vec{b}$
 - $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ je desna baza
 - $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$.



Slika 1.8.3: Vektorski produkt vektora

Geometrijska interpretacija modula vektorskog produkta

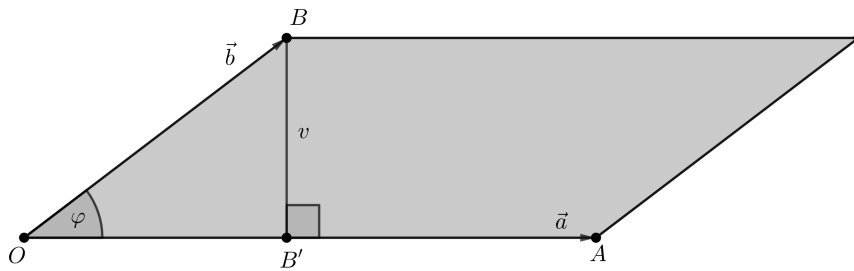
$|\vec{a} \times \vec{b}|$ jest površina paralelograma koji razapinju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dokažimo ovu tvrdnju. Označimo s v visinu paralelograma i s $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ (vidi sliku 1.8.4). Iz pravokutnog trokuta $OB'B$ dobivamo da je

$$\sin \varphi = \frac{v}{|\vec{b}|} \Rightarrow v = |\vec{b}| \sin \varphi,$$

pa je

$$P = |\vec{a}|v = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Naravno, površinu trokuta OAB možemo dobiti kao polovinu površine paralelograma.



Slika 1.8.4: Geometrijska interpretacija modula vektorskog produkta

Svojstva vektorskog produkta

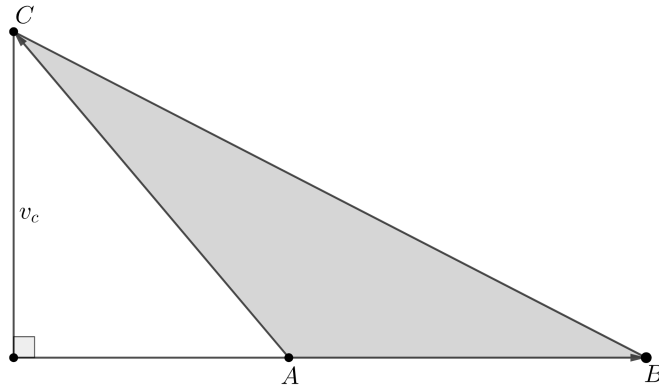
Za sve vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i za svaki realan broj λ vrijedi:

1. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (distributivnost vektorskog produkta s obzirom na zbrajanje)

$$3. \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \text{ (antikomutativnost vektorskog produkta).}$$

Zadatak 22. Trokut ABC razapet je vektorima $\vec{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ i $\vec{AC} = \vec{p} + 5\vec{q}$, pri čemu je $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$. Odredite površinu trokuta ABC i visinu iz vrha C.

Rješenje:



Slika 1.8.5: Zadani elementi Zadatka 22

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(3\vec{p} - 4\vec{q}) \times (\vec{p} + 5\vec{q})| \\ &= \frac{1}{2} |3\vec{p} \times \vec{p} + 15\vec{p} \times \vec{q} - 4\vec{q} \times \vec{p} - 20\vec{q} \times \vec{q}| \\ &= \frac{1}{2} |15\vec{p} \times \vec{q} + 4\vec{p} \times \vec{q}| = \frac{1}{2} |19\vec{p} \times \vec{q}| = \frac{19}{2} |\vec{p} \times \vec{q}| \\ &= \frac{19}{2} |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{19}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 19\sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{(3\vec{p} - 4\vec{q})^2} = \sqrt{9\vec{p}^2 - 24\vec{p} \cdot \vec{q} + 16\vec{q}^2} \\ &= \sqrt{9\vec{p}^2 - 24\vec{p} \cdot \vec{q} + 16\vec{q}^2} = \sqrt{9|\vec{p}|^2 - 24|\vec{p}| |\vec{q}| \cos \frac{\pi}{3} + 16|\vec{q}|^2} \\ &= \sqrt{9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 4} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, \end{aligned}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{AB}| v_c}{2} \Rightarrow v_c = \frac{2P_{\triangle ABC}}{|\vec{AB}|} = \frac{38\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{19\sqrt{39}}{13}.$$

Vektorski produkt u pravokutnom koordinatnom sustavu

Neka je sad $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ desni pravokutni koordinatni sustav i $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Odredimo sad

vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pomoću komponenti tih vektora u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Izračunajmo najprije vektorske produkte vektora baze. Kako je $\vec{i} \parallel \vec{i}$, $\vec{j} \parallel \vec{j}$ i $\vec{k} \parallel \vec{k}$, onda uzimamo da je $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$ i $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$. Odredimo sad $\vec{i} \times \vec{j}$. Nađimo najprije duljinu tog vektora:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| |\vec{j}| \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Kako je $(\vec{i} \times \vec{j}) \perp \vec{i}$ i $(\vec{i} \times \vec{j}) \perp \vec{j}$ (a ovo svojstvo ima i vektor $\vec{k}$) te su $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \times \vec{j})$ i $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ obje desne baze, slijedi da je $\vec{i} \times \vec{j}$ kolinearan s vektorom $\vec{k}$. Kako su oba vektora duljine 1, zaključujemo da je $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Vektor $\vec{j} \times \vec{i}$ bit će suprotno orijentiran, pa je $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$. Tako dobivamo

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$	$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$	$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$	$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$	$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$
$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$	$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$	$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

iz čega slijedi da je

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Determinanta kvadratne matrice

Vektorski produkt vektora u pravokutnom koordinatnom sustavu možemo i jednostavnije računati koristeći determinante matrica 2. i 3. reda. Kako bi objasnili pojam determinante, najprije uvodimo pojam matrice.

Definicija 6: Pravokutnu tablicu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, m, n \in \mathbb{N},$$

čiji su elementi realni brojevi, nazivamo **realna matrica tipa $m \times n$** i označavamo $A \in \mathbb{R}^{mn}$. Ako je $m = n$, tj. broj redaka je jednak broju stupaca, takvu matricu nazivamo **kvadratna matrica**.

Determinanta $A \mapsto \det A$ funkcija je definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara. Osim oznake $\det A$ za determinantu kvadratne matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

često se koristi i oznaka

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta matrice definira se induktivno, tj. determinanta matrice n -tog reda definira se pomoću determinante matrice $(n-1)$ -og reda.

Ako je $A = [a]$, onda je $\det A = a$.

Ako je

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica 2. reda, tada joj možemo pridružiti realan broj

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

koji nazivamo determinanta kvadratne matrice 2. reda.

Realnoj matrici 3. reda

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

pridružujemo determinantu koju računamo na sljedeći način:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

Determinanta matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

reda n je broj

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}a_{1k}\det A_{1k}. \end{aligned}$$

Determinantu možemo računati tako da ju razvijemo po bilo kojem retku ili stupcu, naime vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3. Laplaceov razvoj determinante

Neka je $A \in \mathbb{R}^{nn}$, $n \geq 2$. Tada je

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \forall i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \forall j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

gdje je A_{ij} matrica $(n-1)$ -og reda koja nastaje uklanjanjem i -tog retka i j -tog stupca originalne matrice A . Jednakost (3) se zove **Laplaceov razvoj po i -tom retku**, a (4) se zove **Laplaceov razvoj po j -tom stupcu**.

Mi ćemo ovdje koristiti samo kvadratne matrice 2. i 3. reda.

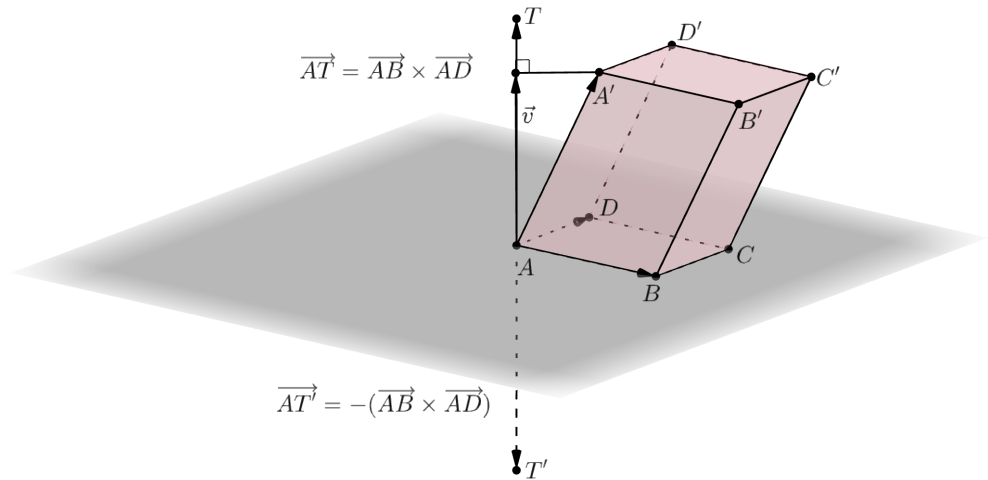
Vektorski produkt vektora $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ zadanih u pravokutnom koordinatnom sustavu možemo jednostavnije dobiti i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Vidimo da je formula (6) jednaka formuli (3).

Zadatak 23. Odredite volumen paralelopipeda $ABCD A' B' C' D'$ ako su $A(3, -5, 2)$, $B(1, -4, 1)$ i $D(6, -2, -1)$ tri vrha osnovice i $A'(5, -2, 1)$.

Rješenje:



Slika 1.8.6: Rješenje Zadatka 23

Vektori dvaju susjednih bridova osnovice su $\vec{AB} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$. Računamo vektorski produkt

$$\begin{aligned}\vec{AT} = \vec{AB} \times \vec{AD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-3+3) - \vec{j}(6+3) + \vec{k}(-6-3) = -9\vec{j} - 9\vec{k}.\end{aligned}$$

Dakle, $P = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{81+81} = 9\sqrt{2}$.

Kako bismo dobili vektor visine $\vec{v}$ moramo napraviti vektorsku projekciju vektora $\vec{AA'}$ na vektor $\vec{AT}$. Najprije nađimo vektor $\vec{AA'} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Imamo

$$\vec{v} = \frac{\vec{AT} \cdot \vec{AA'}}{|\vec{AT}|^2} \vec{AT} = \frac{-27+9}{\sqrt{81+81}^2} (-9\vec{j} - 9\vec{k}) = \vec{j} + \vec{k},$$

pa je

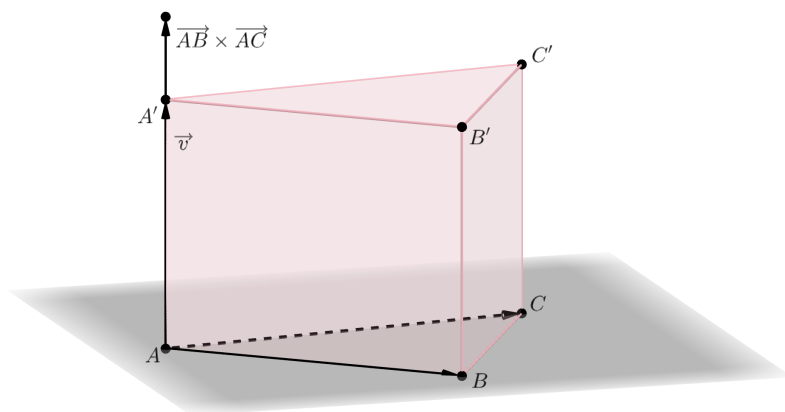
$$|\vec{v}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Konačno je

$$V = P|\vec{v}| = 9\sqrt{2}\sqrt{2} = 18.$$

Zadatak 24. Zadane su točke $A(4, 3, -2)$, $B(3, 5, 1)$ i $C(6, 2, 1)$ koje čine bazu uspravne trostrane prizme. Odredite preostala tri vrha prizme ako je duljina njene visine $v = \sqrt{19}$.

Rješenje:



Slika 1.8.7: Rješenje Zadatka 24

Vektori stranica osnovice su $\vec{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Sad ćemo izračunati vektorski produkt vektora osnovice kako bismo dobili vektor okomit na osnovicu:

$$\begin{aligned}\vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(6+3) - \vec{j}(-3-6) + \vec{k}(1-4) = 9\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}.\end{aligned}$$

Njegova duljina je

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{81 + 81 + 9} = \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$$

pa je

$$\vec{v} = (\vec{AB} \times \vec{AC})_0 / |\vec{v}| = \frac{9\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}}{3\sqrt{19}} \cdot \sqrt{19} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}.$$

Sad dobivamo da je

$$\begin{aligned}\vec{OA'} &= \vec{OA} + \vec{AA'} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} + 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ &= 7\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}, \\ \vec{OB'} &= \vec{OB} + \vec{BB'} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} + 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = 6\vec{i} + 8\vec{j}, \\ \vec{OC'} &= \vec{OC} + \vec{CC'} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} + 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = 9\vec{i} + 5\vec{j},\end{aligned}$$

pa je

$$A' = (7, 6, -3), B'(6, 8, 0), C'(9, 5, 0).$$

Ovaj zadatak ima i drugo rješenje A'', B'', C'' koje dobijemo ako uzmemo suprotno orijentiran vektor visine $\vec{v}$.

1.9 MJEŠOVITI PRODUKT VEKTORA

Mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ realan je broj

$$\begin{aligned}\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) &= |\vec{c}| |\vec{a} \times \vec{b}| \cos \angle(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) \\ &= |\vec{c}| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \cos \angle(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}).\end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija mješovitog produkta

Skicirajmo paralelopiped razapet vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ kao na slici 1.9.1.

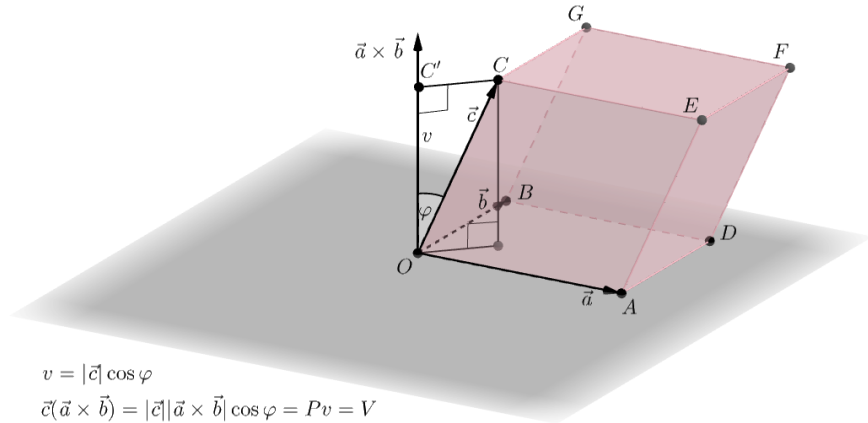
Iz pravokutnog trokuta OCC' dobivamo da je

$$\cos \varphi = \frac{v}{|\vec{c}|} \Rightarrow v = |\vec{c}| \cos \varphi.$$

Sad računamo mješoviti produkt $\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$ te dobivamo

$$\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{c}| |\vec{a} \times \vec{b}| \cos \varphi = Pv = V,$$

gdje P označava površinu paralelograma $OADB$, a V volumen paralelopipeda. Time smo pokazali da preko mješovitog produkta vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ možemo izračunati volumen paralelopipeda razapetog s vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.



Slika 1.9.1: Mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Kako kut φ između vektora $\vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ može poprimiti sve vrijednosti između 0 i π , kosinus tog kuta može biti i negativan, a onda i volumen poprima negativnu vrijednost. Stoga za volumen V uzimamo $|\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})|$.

Ako imamo četverostranu piramidu razapetu s vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, onda je njen volumen jednak $\frac{1}{3}|\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})|$ jer je volumen četverostrane piramide $\frac{1}{3}Pv$. Volumen trostrane piramide, razapete s vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, bit će $\frac{1}{6}|\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})|$ jer je površina baze jednaka $\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Možemo zaključiti da je mješoviti produkt vektora $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ ako i samo ako je barem jedan od vektora nul-vektor ili ako su vektori komplanarni.

Neka su sad dani vektori $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ i $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. Odredimo mješoviti produkt tih vektora pomoću njihovih komponenti u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{aligned} \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) &= (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) \left((a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \right) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) c_x - (a_x b_z - a_z b_x) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z. \end{aligned}$$

Ovaj produkt najjednostavnije je izračunati koristeći determinantu matrice 3. reda:

$$\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Zadatak 25. Vektori $\vec{OA} = \vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{OB} = \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$ i $\vec{OC} = \vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ razapinju trostranu piramidu $OABC$. Odredite volumen piramide i duljinu visine iz vrha C piramide.

Rješenje: Koristeći mješoviti produkt vektora odredimo volumen piramide:

$$\begin{aligned} V &= \left| \frac{1}{6} \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \left(-1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{6} [-1(-4 - 0) + 1(4 - 3) + 4(0 + 6)] \\ &= \frac{1}{6}(4 + 1 + 24) = \frac{29}{6}. \end{aligned}$$

Sad nađimo vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -4\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}.\end{aligned}$$

Površina osnovice OAB iznosi

$$P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{\sqrt{16+1+36}}{2} = \frac{\sqrt{53}}{2}.$$

Konačno, duljina visine je

$$V = \frac{1}{3} P v \Rightarrow v = \frac{3V}{P} = \frac{29}{\sqrt{53}} = \frac{29\sqrt{53}}{53}.$$

Zadatak 26. Odredite volumen paralelopipeda $ABCD A' B' C' D'$ ako su $A(3, -5, 2)$, $B(1, -4, 1)$ i $D(6, -2, -1)$ tri vrha osnovice i $A'(5, -2, 1)$.

Rješenje: Ovaj zadatak smo već riješili koristeći samo vektorski produkt (zadatak 23). Sad ga možete jednostavnije riješiti preko mješovitog produkta vektora. Dakle, računamo mješoviti produkt vektora $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ i $\vec{AA'}$. Traženo rješenje je $V = 18$.

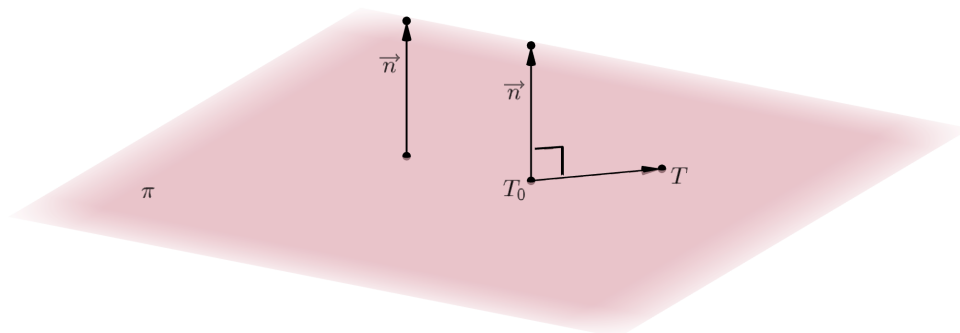
 ANALITIČKA GEOMETRIJA

U ovom poglavlju točke prostora prikazane su u pravokutnim koordinatama te pomoću njih dobivamo algebarske jednadžbe pravca i ravnine u prostoru. Na taj način geometrijske zadaće rješavamo algebarskim metodama.

Također, neki zadatci riješeni su i konstruktivno te je dana usporedba analitičke metode rješavanja i metode nacrtna geometrije.

2.1 JEDNADŽBA RAVNINE

Neka je T_0 točka i $\vec{n} \neq \vec{0}$. Postoji samo jedna ravnina π koja sadrži točku T_0 i okomita je na vektor $\vec{n}$. Vektor $\vec{n}$ nazivamo **vektor normale ravnine** π . Vektor normale $\vec{n}$ ravnine π nije jedinstven. Svaki vektor kolinearan s vektorom $\vec{n}$ također je vektor normale ravnine π .



Slika 2.1.1: Jednadžba ravnine

Točka T je u ravnini π ako i samo ako je $T = T_0$ ili $\overrightarrow{T_0T} \perp \vec{n}$, a to vrijedi ako i samo ako je $\overrightarrow{T_0T} \cdot \vec{n} = 0$. Zbog tog rezultata uvjet $\overrightarrow{T_0T} \cdot \vec{n} = 0$ zovemo **karakterizacija (jednadžba) ravnine** π i pišemo

$$\pi \dots \overrightarrow{T_0T} \cdot \vec{n} = 0.$$

Neka je $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ desni pravokutni koordinatni sustav, $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i $T(x, y, z)$. Sad je

$\overrightarrow{T_0T} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$, pa iz karakterizacije (jednadžbe) ravnine π , $\overrightarrow{T_0T} \cdot \vec{n} = 0$, dobivamo

$$\pi \dots A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (7)$$

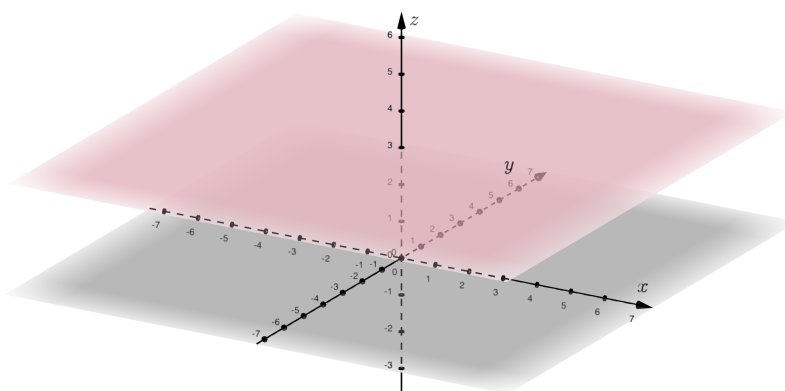
Ako sad označimo $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, onda dobivamo jednakost

$$\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0 \quad (8)$$

koju zovemo **opći oblik jednadžbe ravnine** π .

Primjer 3. Skiciraj ravninu π zadanu jednadžbom $\pi \dots -z + 3 = 0$.

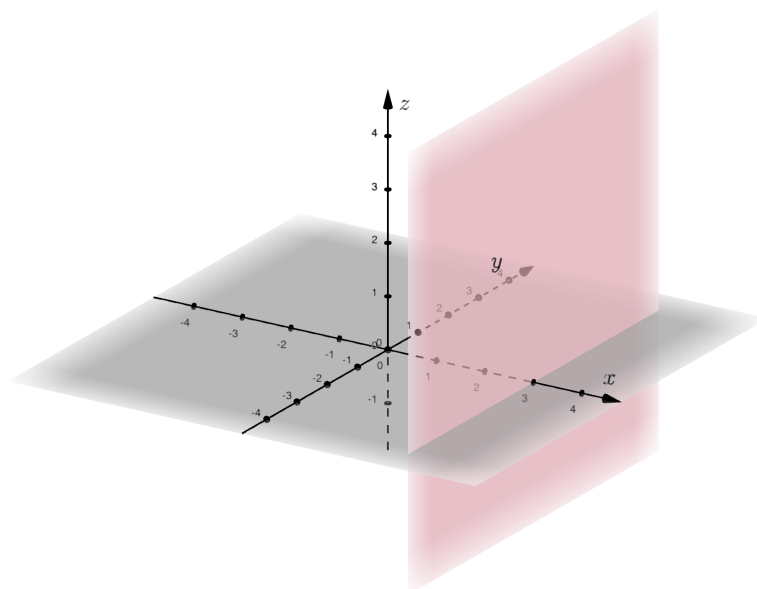
Rješenje:



Slika 2.1.2: Ravnina paralelna s ravninom xy

Primjer 4. Skiciraj ravninu π zadanu jednadžbom $\pi \dots x - 3 = 0$.

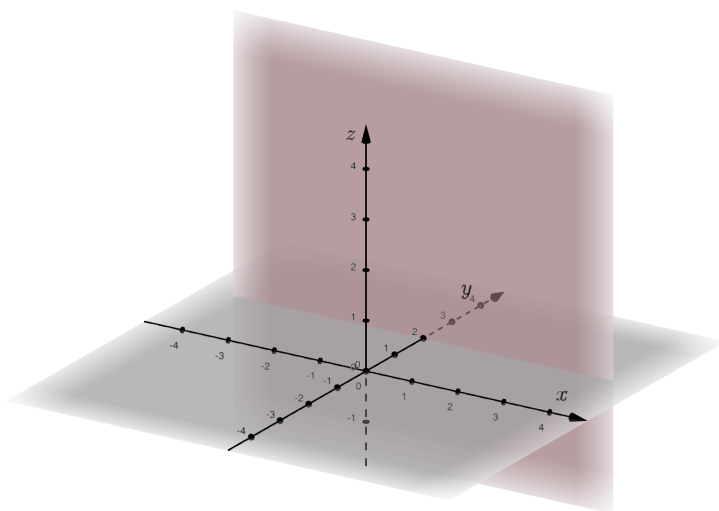
Rješenje:



Slika 2.1.3: Ravnina paralelna s ravninom yz

Primjer 5. Skiciraj ravninu π zadanu jednadžbom $\pi \dots y - 2 = 0$.

Rješenje:



Slika 2.1.4: Ravnina paralelna s ravninom xz

Zadatak 27. Napiši opći oblik jednadžbe ravnine π koja prolazi točkom $T_0(-1, 3, 2)$ i okomita je na vektor $\vec{n} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje:

$$\pi \dots 2(x + 1) - 3(y - 3) + (z - 2) = 0$$

$$\pi \dots 2x + 2 - 3y + 9 + z - 2 = 0$$

$$\pi \dots 2x - 3y + z + 9 = 0.$$

2.2 JEDNADŽBA PRAVCA

Neka je dana točka T_0 i vektor $\vec{q} \neq \vec{0}$. Postoji točno jedan pravac p koji sadrži točku T_0 i ima smjer vektora $\vec{q}$.

Točka T je na pravcu p ako i samo ako je vektor $\overrightarrow{T_0T}$ kolinearan s vektorom $\vec{q}$, a to vrijedi ako i samo ako se vektor $\overrightarrow{T_0T}$ može zapisati kao $\overrightarrow{T_0T} = t\vec{q}, t \in \mathbb{R}$. Uvjet

$$\overrightarrow{T_0T} = t\vec{q}, t \in \mathbb{R}$$

nazivamo **karakterizacija (jednadžba) pravca p** i pišemo

$$p \dots \overrightarrow{T_0T} = t\vec{q}, t \in \mathbb{R}.$$



Slika 2.2.1: Jednadžba pravca

Neka je $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ desni pravokutni koordinatni sustav, $\vec{q} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i $T(x, y, z)$. Sad je $\overrightarrow{T_0T} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$, pa iz uvjeta $\overrightarrow{T_0T} = t\vec{q}$, $t \in \mathbb{R}$ dobivamo jednakosti

$$p = \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9)$$

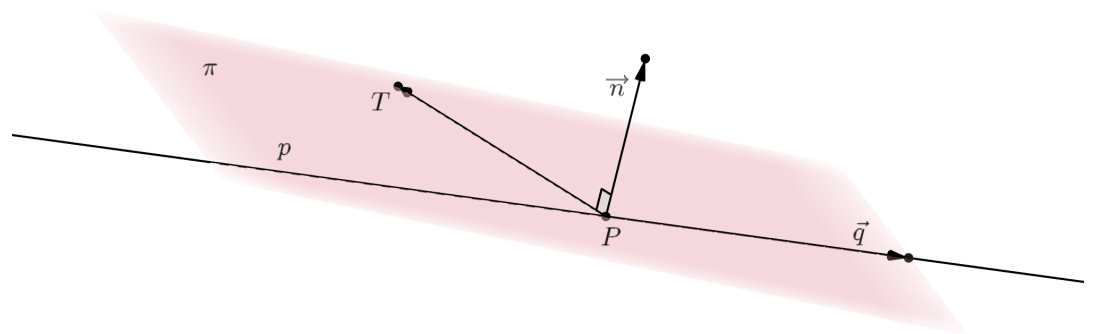
koje zovemo **parametarska jednadžba pravca** p . Eliminacijom parametra t dobivamo

$$p \dots \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (10)$$

kanonski oblik jednadžbe pravca p .

Zadatak 28. Točkom $T(-2, 2, 3)$ i pravcem $p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$ postavite ravninu.

Rješenje:



Slika 2.2.2: Rješenje zadatka 28

Uzmimo neku točku pravca p , npr. $P(1, 1, -1)$. Sad je $\overrightarrow{PT} = -3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Vektor normale ravnine π dobijemo kao

vektorski produkt vektora smjera $\vec{q} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ pravca p i vektora $\vec{PT}$:

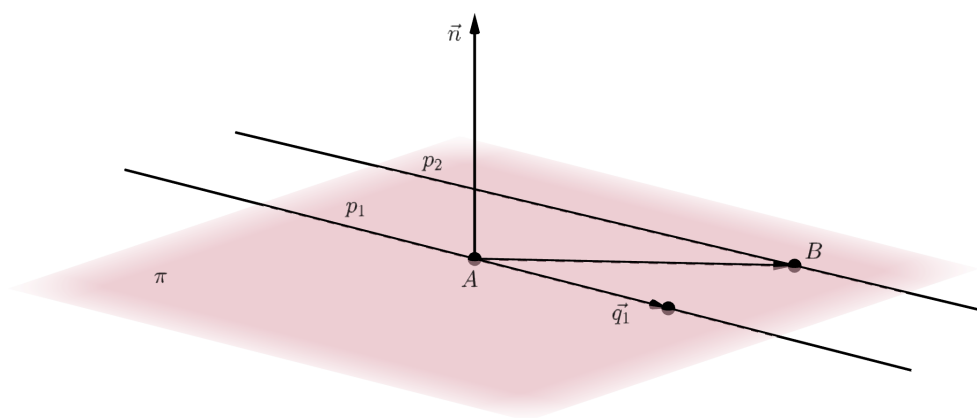
$$\vec{PT} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 11\vec{j} - 11\vec{k} = -11(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).$$

Dakle, $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, pa je $\pi \dots x - y + z + 1 = 0$.

Zadatak 29. Postavite ravninu kroz pravce

$$p_1 \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1} \text{ i } p_2 \dots \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Rješenje:



Slika 2.2.3: Rješenje zadatka 29

Vidimo da su pravci p_1 i p_2 paralelni (jer su im jednaki vektori smjera $\vec{q}_1 = \vec{q}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$) pa određuju ravninu. Kako bismo napisali jednadžbu ravnine moramo odrediti vektor normale. Vektor normale dobivamo kao vektorski produkt dva vektora ravnine s tim da ne možemo uzeti vektore smjera pravaca p_1 i p_2 jer su to kolinearni vektori pa je njihov vektorski produkt jednak nulvektoru.

Uzmimo vektor smjera pravca p_1 (ili pravca p_2)

$\vec{q}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ te točku $A(1, 1, -2)$ pravca p_1 i točku $B(0, 1, 3)$ pravca p_2 . Sad je $\vec{AB} = -\vec{i} + 5\vec{k}$, pa je

$$\vec{q}_1 \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k} = 3(5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}).$$

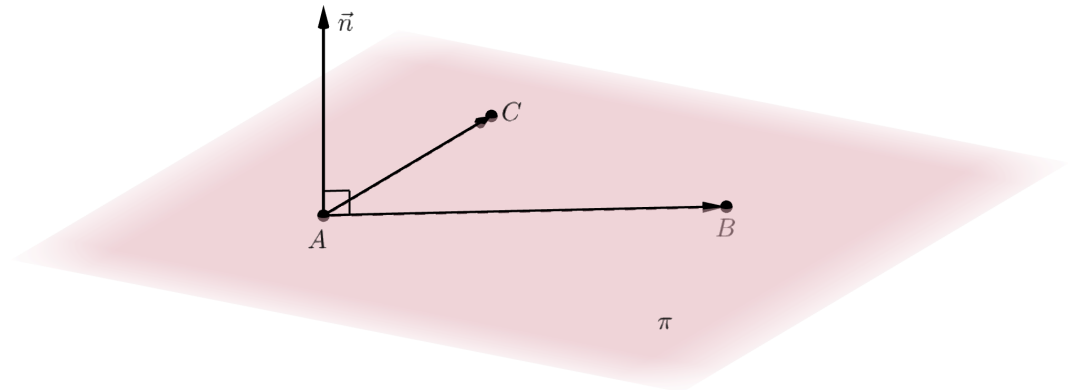
Jednadžba ravnine π sad glasi

$$\pi \dots 5(x - 1) - 3(y - 1) + z + 2 = 0$$

$$\pi \dots 5x - 3y + z = 0.$$

Zadatak 30. Odredite jednadžbu ravnine π zadane točkama $A(5, 4, -5)$, $B(3, 2, -3)$ i $C(5, 3, -4)$.

Rješenje:



Slika 2.2.4: Rješenje zadatka 30

Odredimo vektore $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\overrightarrow{AC} = -\vec{j} + \vec{k}$. Vidimo da dobiveni vektori nisu kolinearni pa određuju ravninu. Odredimo vektor normale ravnine π

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Sad je jednadžba ravnine π jednaka

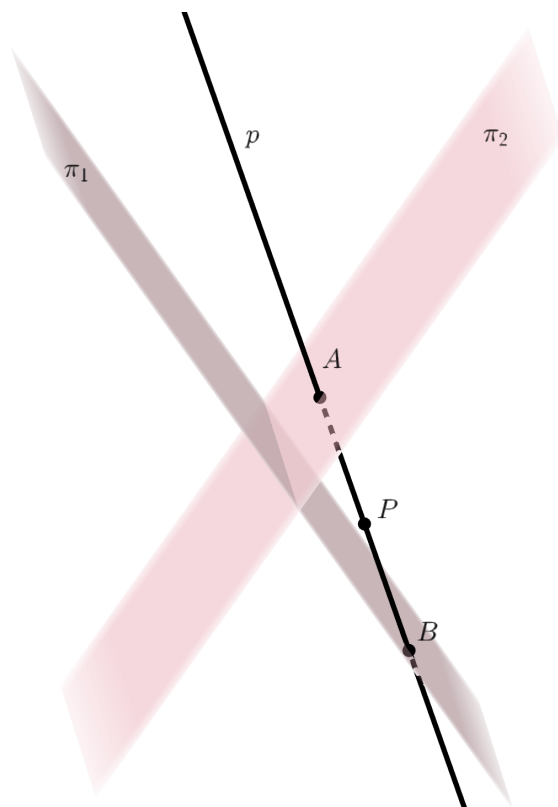
$$\begin{aligned} \pi \dots 2(y - 4) + 2(z + 5) &= 0 \\ \pi \dots 2y + 2z + 2 &= 0 / : 2 \Rightarrow \pi \dots y + z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Zadatak 31. Na pravcu $p \dots \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$ nađite točku jednako udaljenu od probodišta pravca s ravninama

$$\pi_1 \dots -x + y - z + 2 = 0,$$

$$\pi_2 \dots x - y - z - 2 = 0.$$

Rješenje: Skicirajmo traženo rješenje. Iz jednadžbi vidimo da ravnine nisu paralelne. Trebamo pronaći probodište pravca p i zadanih ravnina. Tražena točka je polovište dobivenih probodišta.



Slika 2.2.5: Rješenje zadatka 31

Zapišimo pravac p u parametarskom obliku. Dobivamo

$$p = \begin{cases} x = t - 3 \\ y = 2t - 1 \\ z = -2t + 2. \end{cases}$$

Sad pravac uvrštavamo u jednadžbe ravnina kako bismo dobili probodista:

$$p \cap \pi_1 \dots -t + 3 + 2t - 1 + 2t - 2 + 2 = 0$$

$$t = -\frac{2}{3} \Rightarrow B(-\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{10}{3}),$$

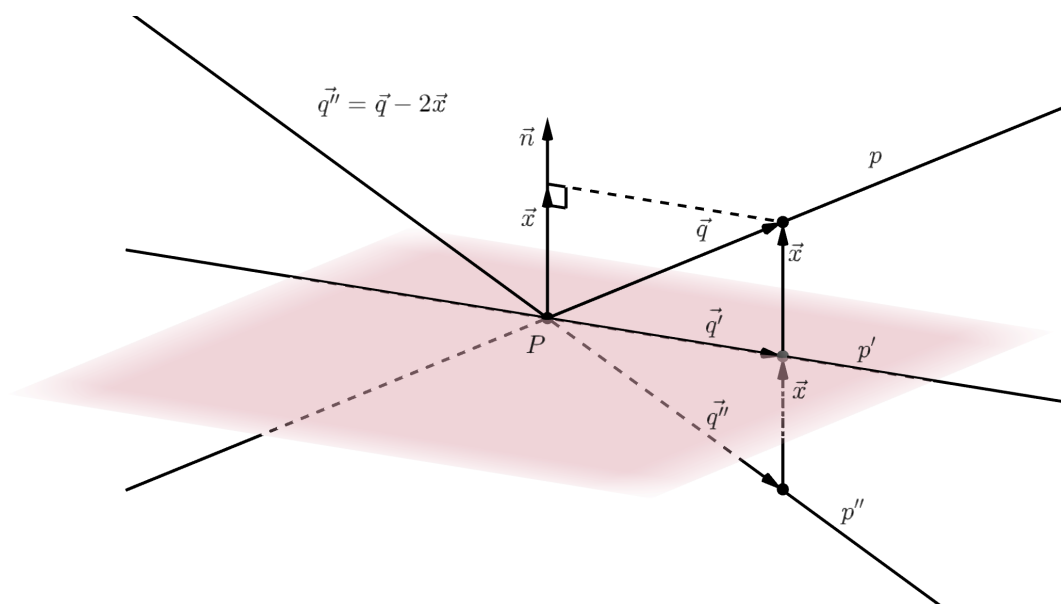
$$p \cap \pi_2 \dots t - 3 - 2t + 1 + 2t - 2 - 2 = 0$$

$$t = 6 \Rightarrow A(3, 11, -10).$$

Sad je polovište

$$P\left(\frac{-\frac{11}{3} + 3}{2}, \frac{-\frac{7}{3} + 11}{2}, \frac{\frac{10}{3} - 10}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}, -\frac{10}{3}\right).$$

Zadatak 32. Neka je dan pravac $p \dots \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{2}$ i ravnina $\pi \dots x + 2y - z + 2 = 0$. Odredite ortogonalnu projekciju p' pravca p u ravninu π te pravac p'' simetričan pravcu p s obzirom na ravninu π .

Rješenje:

Slika 2.2.6: Rješenje zadatka 32

Odredimo najprije probodište pravca p i ravnine π . Zapišimo pravac p u parametarskom obliku

$$p = \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 1 \\ z = 2t + 2, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

te ga sad uvrstimo u jednadžbu ravnine π :

$$t - 1 + 2 - 2t - 2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -t + 1 = 0$$

$$t = 1.$$

Dobivamo da je probodište pravca p i ravnine π točka $P(0, 1, 4)$. Kako bismo odredili vektor smjera pravca p' , najprije po formuli (2) izračunajmo vektorsku projekciju $\vec{x}$ vektora smjera pravca p na vektor normale ravnine π . Imamo da je $\vec{q} = \vec{i} + 2\vec{k}$ te $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ pa je

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \frac{1 + 0 - 2}{\sqrt{1 + 4 + 1}} (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \\ &= -\frac{1}{6} (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}). \end{aligned}$$

Sad je

$$\begin{aligned} \vec{q}' &= \vec{q} - \vec{x} = \vec{i} + 2\vec{k} + \frac{1}{6} (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \\ &= \frac{7}{6} \vec{i} + \frac{1}{3} \vec{j} + \frac{11}{6} \vec{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{q}'' &= \vec{q} - 2\vec{x} = \vec{i} + 2\vec{k} + \frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \\ &= \frac{4}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{5}{3}\vec{k},\end{aligned}$$

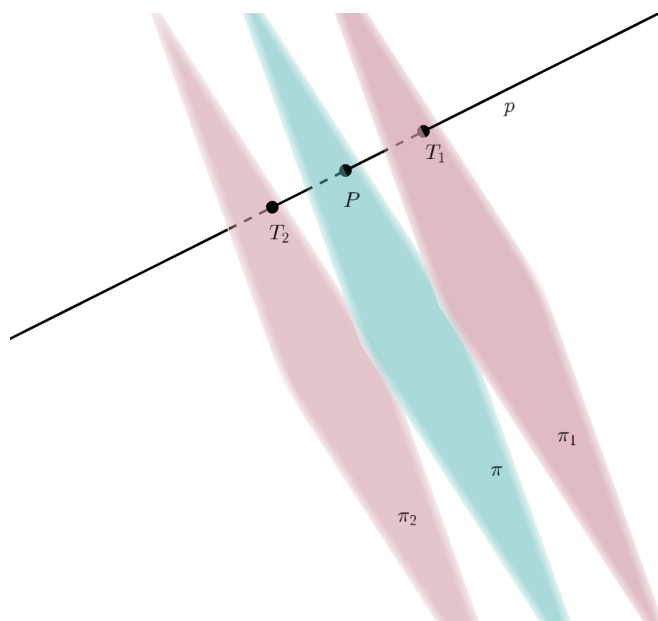
pa je

$$p' \dots \frac{6x}{7} = \frac{3(y-1)}{1} = \frac{6(z-4)}{11},$$

$$p'' \dots \frac{3x}{4} = \frac{3(y-1)}{2} = \frac{3(z-4)}{5}.$$

Zadatak 33. Odredite jednadžbu ravnine π s obzirom na koju su ravnine $\pi_1 \dots 2x - y + 2z - 2 = 0$ i $\pi_2 \dots -4x + 2y - 4z + 3 = 0$ međusobno simetrične. Također, odredite udaljenost ravnina π_1 i π_2 .

Rješenje: Uočimo da su ravnine π_1 i π_2 međusobno paralelne jer je $\vec{n}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{n}_2 = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ te je $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$.



Slika 2.2.7: Rješenje zadatka 33

Uzmimo točku $T_1 \in \pi_1$ te njome postavimo pravac okomit na ravnine π_1 i π_2 . Odaberimo proizvoljno 2 koordinate, npr. $x = 0$ i $y = 0$. Ako ih uvrstimo u jednadžbu ravnine π_1 dobivamo da je $z = 1$. Dakle, točka T_1 ima koordinate $T_1(0, 0, 1)$ pa je jednadžba pravca p

$$p = \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 2t + 1, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Odredimo probodište T_2 pravca p i ravnine π_2 :

$$\begin{aligned} -8t - 2t - 4(2t + 1) + 3 &= 0 \\ \Rightarrow t &= -\frac{1}{18} \\ \Rightarrow T_2 &= \left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{8}{9}\right). \end{aligned}$$

Polovište P dužine $\overline{T_1 T_2}$ ima koordinate $P\left(-\frac{1}{18}, \frac{1}{36}, \frac{17}{18}\right)$ pa je jednačba ravnine π

$$\begin{aligned} \pi \dots 2\left(x + \frac{1}{18}\right) - \left(y - \frac{1}{36}\right) + 2\left(z - \frac{17}{18}\right) &= 0 \\ \pi \dots 2x - y + 2z - \frac{7}{4} &= 0. \end{aligned}$$

Udaljenost ravnina π_1 i π_2 dobijemo tako da izračunamo udaljenost točaka T_1 i T_2 :

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(0 + \frac{1}{9}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{18}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{9}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{81} + \frac{1}{324} + \frac{1}{81}} = \sqrt{\frac{9}{324}} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

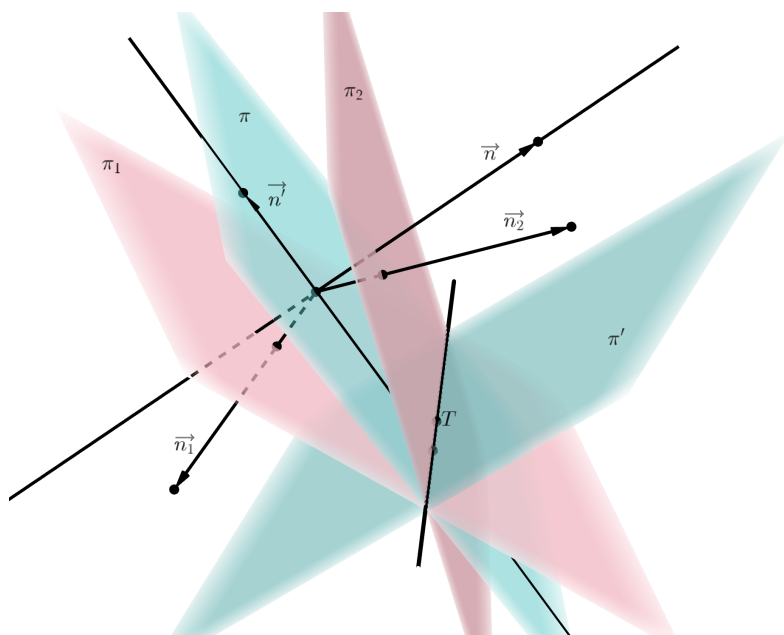
Skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od dviju ravnina π_1 i π_2 leže u jednoj ravnini koju nazivamo **simetralnom ravninom** ravnina π_1 i π_2 .

Vektore normala $\vec{n}$ i $\vec{n'}$ simetralnih ravnina dobivamo kao vektore simetrala kuteva koje zatvaraju vektori normala ravnina π_1 i π_2 tj.

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|}, \quad \vec{n'} = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} - \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|}.$$

Zadatak 34. Odredite jednačbe ravnina s obzirom na koje su ravnine $\pi_1 \dots x - y + 2z + 1 = 0$ i $\pi_2 \dots 2x - 3y + z + 1 = 0$ međusobno simetrične (simetralne ravnine ravnina π_1 i π_2). Također, odredite kut između ravnina π_1 i π_2 .

Rješenje:



Slika 2.2.8: Rješenje zadatka 34

Najprije odredimo jednu točku pravca presječnice ravnina π_1 i π_2 .
Uzmimo npr. da je koordinata $x = 0$ te riješimo sustav:

$$\begin{aligned} -y + 2z + 1 &= 0 \\ -3y + z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Dobivamo $y = \frac{1}{5}$ i $z = -\frac{2}{5}$ te je $T(0, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}) \in \pi_1 \cap \pi_2$.

Vektore normala simetralnih ravnina dobivamo kao vektore simetrala kuteva koje zatvaraju vektori normala ravnina π_1 i π_2 pa je

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} \\ &= \frac{\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6}} + \frac{2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})\vec{i} + (-\sqrt{7} - 3\sqrt{3})\vec{j} + (2\sqrt{7} + \sqrt{3})\vec{k}}{\sqrt{42}} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \vec{n}' &= \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} - \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} \\ &= \frac{\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6}} - \frac{2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})\vec{i} + (-\sqrt{7} + 3\sqrt{3})\vec{j} + (2\sqrt{7} - \sqrt{3})\vec{k}}{\sqrt{42}}. \end{aligned}$$

Tražene ravnine su

$$\pi \dots (\sqrt{7} + 2\sqrt{3})x + (-\sqrt{7} - 3\sqrt{3})y + (2\sqrt{7} + \sqrt{3})z + \sqrt{7} + \sqrt{3} = 0$$

i

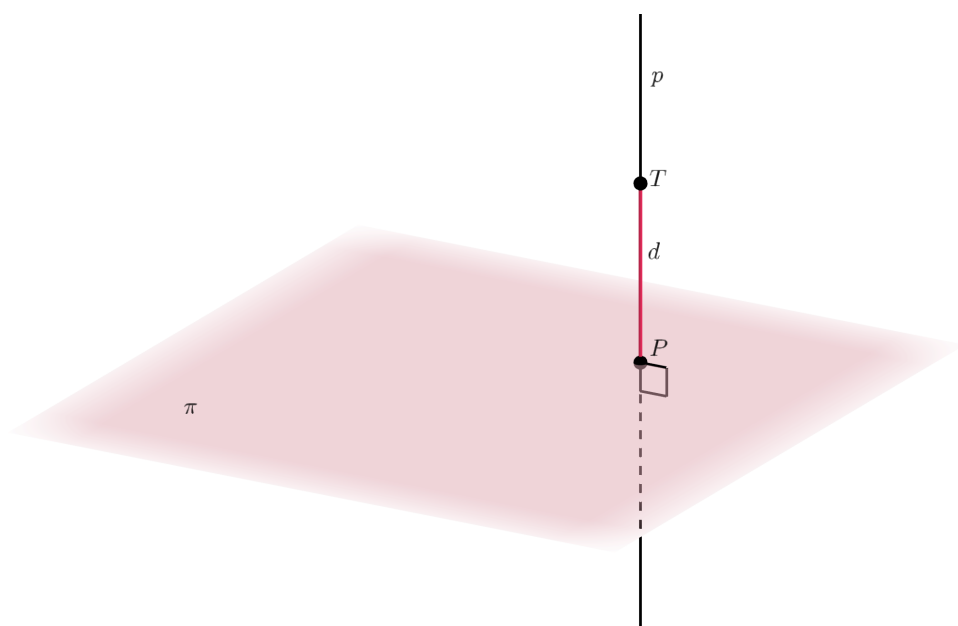
$$\pi' \dots (\sqrt{7} - 2\sqrt{3})x + (-\sqrt{7} + 3\sqrt{3})y + (2\sqrt{7} - \sqrt{3})z + \sqrt{7} - \sqrt{3} = 0.$$

Kut između ravnina π_1 i π_2 jednak je kutu između njihovih vektora normala pa imamo

$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) &= \frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})|}{\sqrt{6}\sqrt{14}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{84}} = \frac{\sqrt{84}}{12} = \frac{\sqrt{21}}{6} \\ &\Rightarrow \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 40^\circ 12' 11''. \end{aligned}$$

Zadatak 35. Odredite udaljenost točke $T(2, -3, 4)$ od ravnine $\pi \dots 2x - y + z + 1 = 0$.

Rješenje:



Slika 2.2.9: Rješenje zadatka 35

Točkom T postavimo okomicu na ravninu π . Dakle, vektor smjera $\vec{q}$ okomice p bit će jednak vektoru normale $\vec{n}$ ravnine π :

$$\vec{q} = \vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

Sad je jednadžba pravca p .

$$p = \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t - 3 \\ z = t + 4, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Odredimo probodište pravca p i ravnine π :

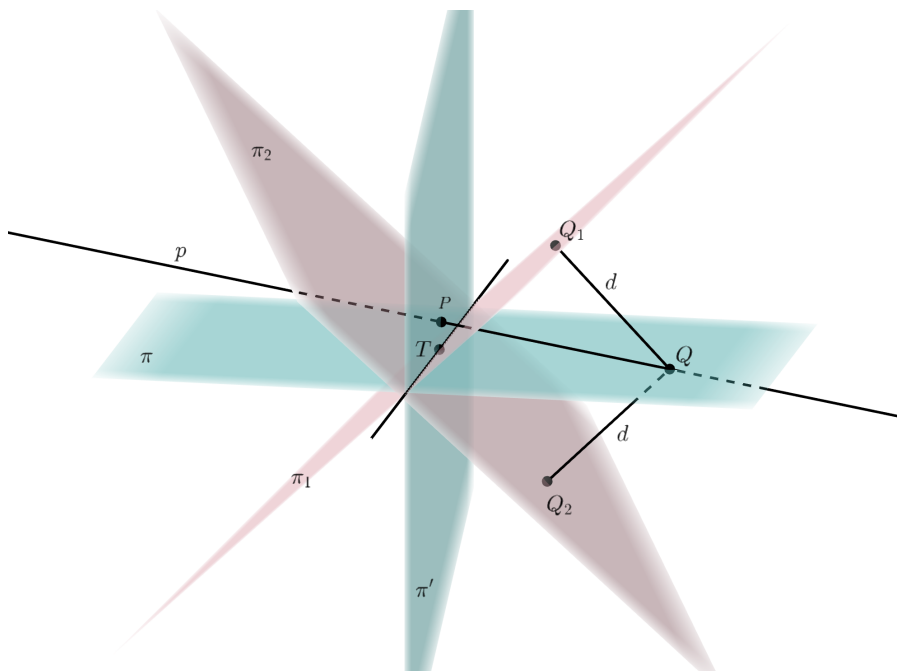
$$\begin{aligned} 2(2t + 2) - (-t - 3) + t + 4 + 1 &= 0 \\ \Rightarrow 4t + 4 + t + 3 + t + 4 + 1 &= 0 \\ \Rightarrow 6t + 12 &= 0 \Rightarrow t = -2 \end{aligned}$$

pa je $P(-2, -1, 2)$. Sad je udaljenost d točke T od ravnine π jednaka

$$\begin{aligned} d(T, P) &= \sqrt{(2+2)^2 + (-3+1)^2 + (4-2)^2} \\ &= \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Zadatak 36. Odredite točke pravca $p \dots \frac{x+\frac{7}{3}}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{0}$ jednako udaljene od ravnina $\pi_1 \dots -x + 2y - 2z + 3 = 0$ i $\pi_2 \dots -2x + y + 2z - 1 = 0$. Koliko iznose udaljenosti tih točaka od ravnina π_1 i π_2 ?

Rješenje:



Slika 2.2.10: Rješenje zadatka 36

Točke pravca p jednako udaljene od ravnina π_1 i π_2 dobivamo kao probodišta pravca p sa simetralnim ravninama ravnina π_1 i π_2 . Za odrediti simetralne ravnine najprije odredimo jednu točku pravca

presječnice ravnina π_1 i π_2 . Uzmimo npr. da je koordinata $x = 0$ te riješimo sustav:

$$2y - 2z + 3 = 0$$

$$y + 2z - 1 = 0.$$

Dobivamo $y = -\frac{2}{3}$ i $z = \frac{5}{6}$ te je $T(0, -\frac{2}{3}, \frac{5}{6}) \in \pi_1 \cap \pi_2$.

Vektore normala simetralnih ravnina dobivamo kao vektore simetrala kuteva koje zatvaraju vektori normala ravnina π_1 i π_2 pa je

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} \\ &= \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3} + \frac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3} = -\vec{i} + \vec{j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} - \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} \\ &= \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3} + \frac{2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}{3} = \frac{\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}}{3}.\end{aligned}$$

Tražene ravnine su

$$\pi' \dots -x + y + \frac{2}{3} = 0,$$

$$\pi \dots x + y - 4z + 4 = 0.$$

Odredimo probodišta pravca p s ravninama π' i π :

$$-(t - \frac{7}{3}) - 2t + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow t = 1$$

pa je $P(-\frac{4}{3}, -2, 3)$,

$$t - \frac{7}{3} - 2t - 12 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{31}{3}$$

pa je $Q(-\frac{38}{3}, \frac{62}{3}, 3)$.

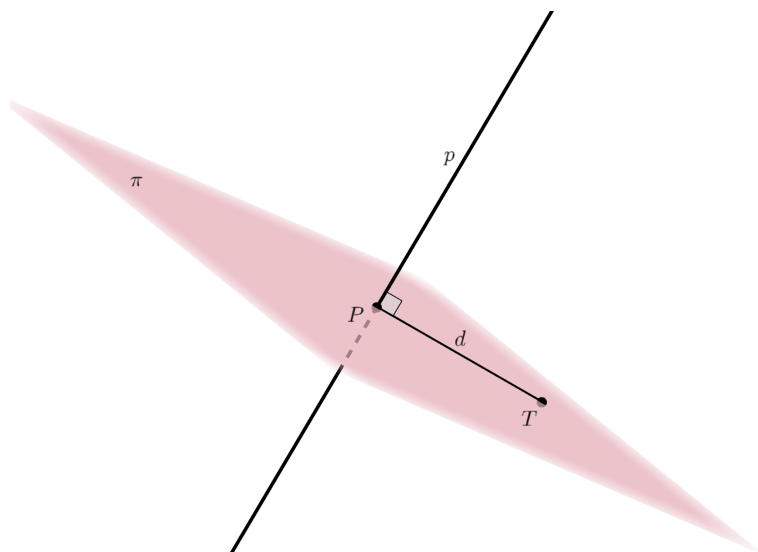
Udaljenosti točke Q od ravnina π_1 i π_2 dobijemo tako da točkom Q postavimo okomicu o na jednu od ravnina, npr. π_1 te tražimo probodište okomice i ravnine. Dobivamo da je jednadžba okomice o jednaka $o \dots \frac{x + \frac{38}{3}}{-1} = \frac{y - \frac{62}{3}}{2} = \frac{z - 3}{-2}$, a onda je traženo probodište točka $Q_1(-7, \frac{28}{3}, \frac{43}{3})$.

Sad je udaljenost d točke Q od ravnine π_1 jednaka

$$d(Q, Q_1) = \sqrt{\left(-7 + \frac{38}{3}\right)^2 + \left(\frac{28}{3} - \frac{62}{3}\right)^2 + \left(\frac{43}{3} - 3\right)^2} = 17.$$

Zadatak 37. Odredite udaljenost točke $T(2, 2, -3)$ od pravca $p \dots \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Rješenje:



Slika 2.2.11: Rješenje zadatka 37

Postavimo ravninu π točkom T okomito na pravac p :

$$\begin{aligned}\pi \dots (x-2) + 2(y-2) + 3(z+3) &= 0 \\ \pi \dots x + 2y + 3z + 3 &= 0.\end{aligned}$$

Sad odredimo probodište pravca p i ravnine π . Zapišimo pravac p u parametarskom obliku

$$p = \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t + 1, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

uvrstimo ga u jednadžbu ravnine π , pa dobivamo

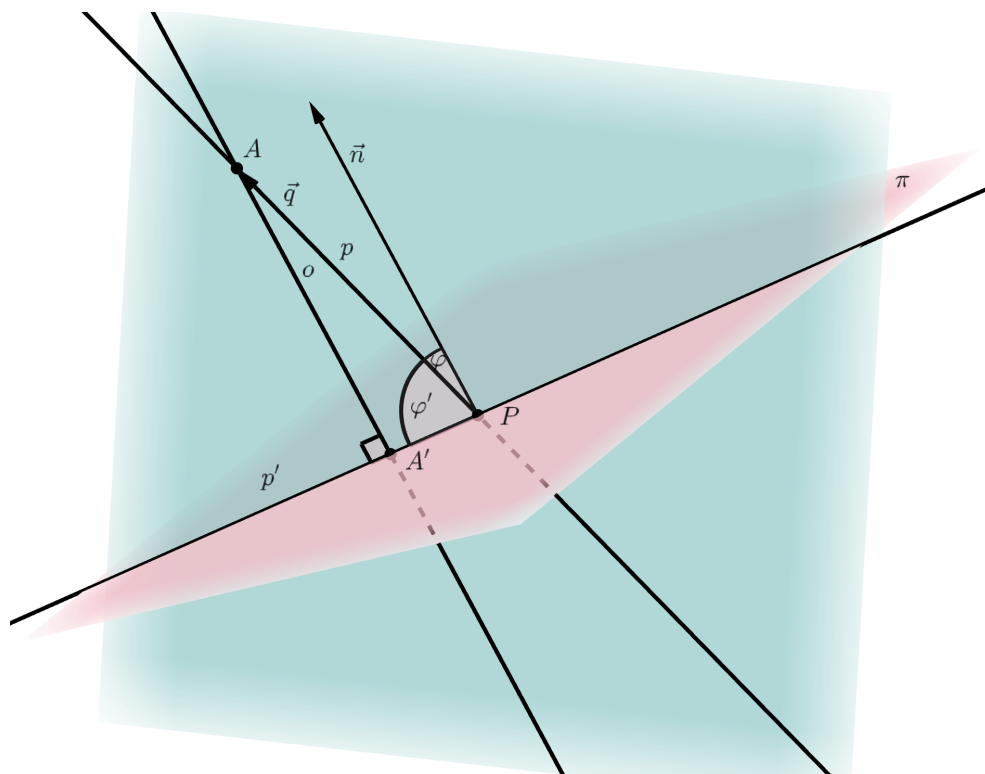
$$\begin{aligned}t - 2 + 2(2t + 2) + 3(3t + 1) + 3 &= 0 \\ t &= -\frac{4}{7}\end{aligned}$$

pa je probodište $P(-\frac{18}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{5}{7})$. Udaljenost točke T do pravca p jednaka je udaljenosti točaka T i P , a ta udaljenost iznosi:

$$\begin{aligned}d(T, P) &= \sqrt{\left(2 + \frac{18}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{6}{7}\right)^2 + \left(-3 + \frac{5}{7}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1344}{49}} = \frac{8\sqrt{21}}{7}.\end{aligned}$$

Zadatak 38. Odredite kut između pravca $p \dots \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$ i ravnine $\pi \dots x - y + 2z - 3 = 0$.

Rješenje:



Slika 2.2.12: Rješenje zadatka 38

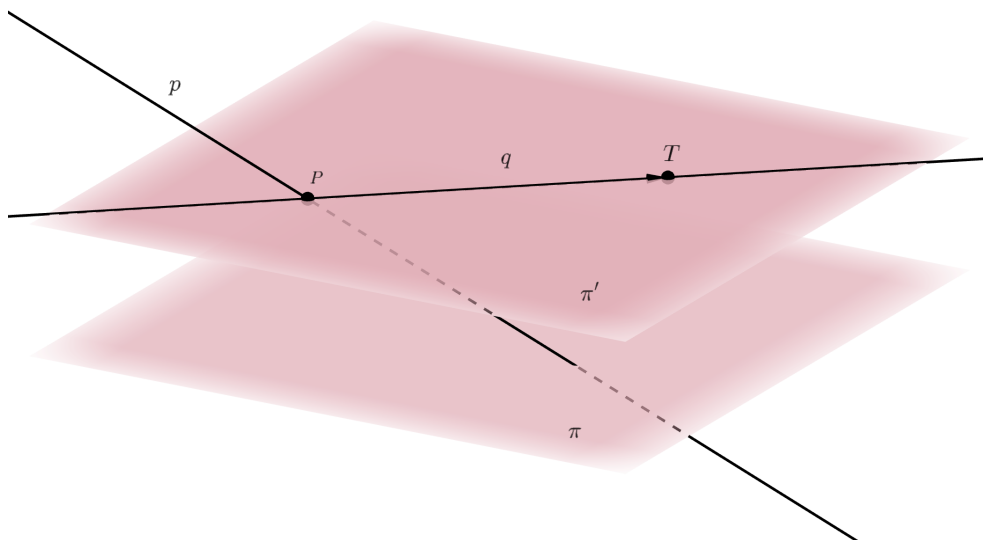
Kut između pravca p i ravnine π jednak je kutu između pravca i njegove ortogonalne projekcije u tu ravninu.

Vidimo da je taj kut φ' jednak $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, gdje je $\varphi = \angle(\vec{q}, \vec{n})$. $\vec{q} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ je vektor smjera pravca p , a $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ vektor normale ravnine π . Sad je

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{|\vec{q} \cdot \vec{n}|}{|\vec{q}| |\vec{n}|} = \frac{3 + 2 + 6}{\sqrt{9 + 4 + 9} \sqrt{1 + 1 + 4}} \\ \Rightarrow \varphi &= 16^\circ 46' 43'' \\ \Rightarrow \angle(p, p') &= 73^\circ 13' 17''.\end{aligned}$$

Zadatak 39. Odredite pravac q koji prolazi točkom $T(3, 2, 5)$, siječe pravac $p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ i paralelan je s ravninom $\pi \dots x - y + 2z - 2 = 0$.

Rješenje:



Slika 2.2.13: Rješenje zadatka 39

Točkom T postavimo ravninu π' paralelnu s ravinom π . Kako su ravnine paralelne, imaju isti vektor normale pa je $\vec{n}' = \vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Sad je

$$\begin{aligned}\pi' \dots x - 3 - (y - 2) + 2(z - 5) &= 0 \\ \Rightarrow \pi' \dots x - y + 2z - 11 &= 0.\end{aligned}$$

Odredimo probodište pravca p i ravnine π' . Napišimo pravac p u parametarskom obliku

$$p = \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = t + 2, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

te ga uvrstimo u jednadžbu ravnine π'

$$\begin{aligned}2t + 1 - (t + 1) + 2(t + 2) - 11 &= 0 \\ \Rightarrow t &= \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Probodište P ima koordinate $P\left(\frac{17}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$. Dakle, vektor smjera pravca q je

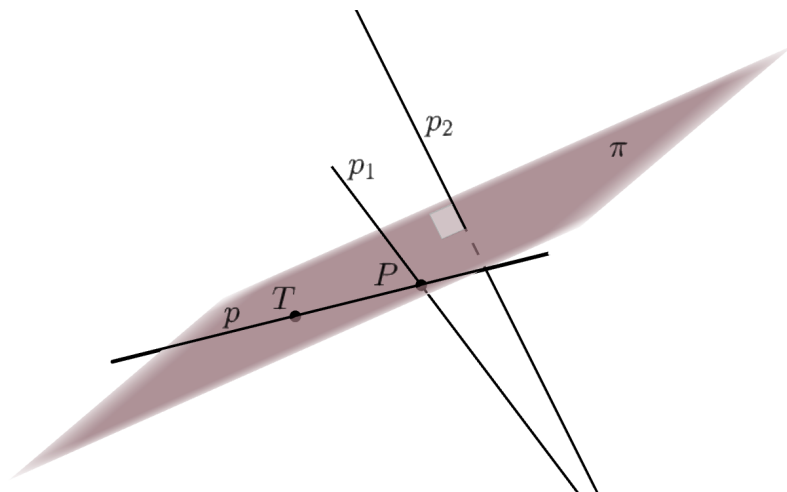
$$\vec{PT} = -\frac{8}{3}\vec{i} - \frac{4}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

pa jednadžba pravca q glasi

$$q = \begin{cases} x = -\frac{8}{3}t + 3 \\ y = -\frac{4}{3}t + 2 \\ z = \frac{2}{3}t + 5, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zadatak 40. Točkom $T(-1, 1, 0)$ postavite pravac p koji siječe pravac $p_1 \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ i čiji je vektor smjera okomit na vektor smjera pravca $p_2 \dots \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$.

Rješenje:



Slika 2.2.14: Rješenje zadatka 40

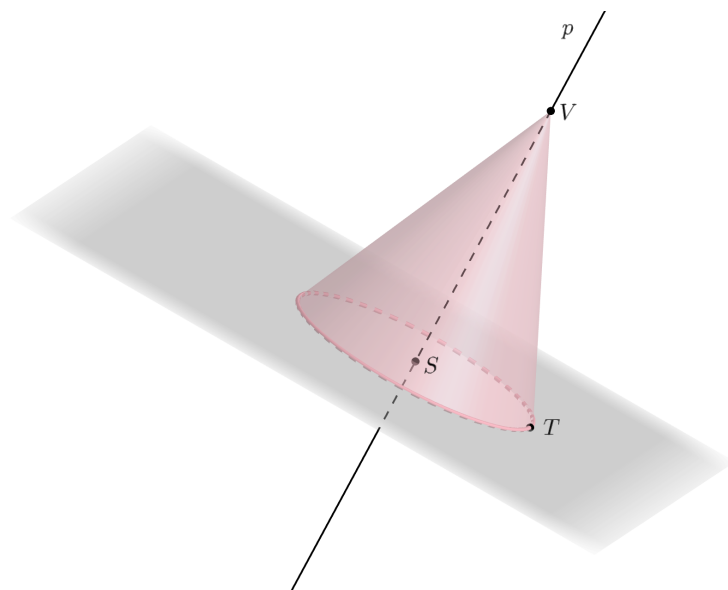
Postavimo ravninu π točkom T okomito na pravac p_2 . Dakle, vektor smjera $\vec{q}_2$ pravca p_2 normala je ravnine π čija jednadžba glasi $\pi \dots x + y - z = 0$. Pronađimo probodište pravca p_1 i ravnine π . Kako je

$$p_1 = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t - 1, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dobivamo $t + 1 + 2t - (t - 1) = 0$, iz čega je $t = -1$ pa je probodište $P(0, -2, -2)$. Vektor smjera pravca p je $\vec{TP} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ pa je $p \dots \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{-2}$.

Zadatak 41. Visina uspravnog stošca je na pravcu $p \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$, točka $V(3, 3, 2)$ vrh je stošca, a točka $T(3, -2, 0)$ na obodnoj je kružnici baze stošca. Odredite koordinate središta S osnovice te volumen stošca.

Rješenje:



Slika 2.2.15: Rješenje zadatka 41

Postavimo ravninu točkom T okomito na pravac p . Dakle, vektor normale ravnine je $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ pa njena jednadžba glasi $\pi \dots x + 2y + z + 1 = 0$. Sad odredimo probodište S pravca p i ravnine π . Pravac p zapišemo u parametarskom obliku

$$p = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

uvrstimo u jednadžbu ravnine te dobivamo $t = 0$. Koordinate točke S glase $S(1, -1, 0)$.

Volumen stošca računamo

$$r = d(S, T) = \sqrt{(1-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{5},$$

$$v = d(S, V) = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{6},$$

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi v = \frac{10\sqrt{6}\pi}{3}.$$

DODATAK: POVEŽIMO ANALITIČKU I NACRTNU GEOMETRIJU

Ovaj udžbenik prvenstveno je namijenjen studentima Studija arhitekture i urbanizma te Studiju dizajna koji na početku svog fakultetskog obrazovanja slušaju i kolegije nacrtne geometrije. Nerijetko se događa da studenti ne uočavaju poveznicu između sadržaja analitičke geometrije obrađene u prethodnom poglavlju i tog istog sadržaja promatranog "očima" nacrtne geometrije. Općenito, prema načinu na koji rješavamo geometrijske probleme, geometriju dijelimo na:

- analitičku geometriju (alat: algebra)
- diferencijalnu geometriju (alat: diferencijalni račun)
- sintetičku geometriju (alat: logično zaključivanje i prostorni zor)
- nacrtna geometrija (alat: konstruktivno rješavanje metodama projiciranja).

Podsjećamo da je proučavanje geometrije nužno za razvijanje prostornog zora i razumijevanje računalnih 3D programa. U ovom dodatku riješit ćemo nekoliko metričkih zadataka metodama ortogonalnog projiciranja. Te iste zadatke obrađene su u prethodnom poglavlju na algebarski način. Dakle, promatramo iste metričke probleme iz dva različita kuta. Pri rješavanju alatima nacrtne geometrije pretpostavlja se osnovno znanje ortogonalnog projiciranja. Napominjemo da se u analitičkoj geometriji koristi desni koordinatni sustav, a u nacrtnoj lijevi koordinatni sustav.

2.A OSNOVNI ELEMENTI

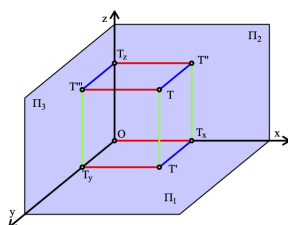
U nacrtnoj geometriji uvodeći bilo koju metodu projiciranja promatramo tri osnovna geometrijska elementa: točku, pravac, ravnina te njihove odnose.

2.A.1 Točka

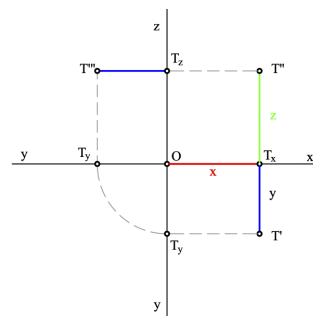
Kod metode ortogonalnog projiciranja prostornih figura i odnosa među njima, projiciramo okomitim zrakama na tri međusobno okomite ravnine Π_1 , Π_2 , Π_3 (vidi sliku [2.A.1a](#)). Koordinatne osi lijevog koordinatnog sustava su

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \equiv x, \quad \Pi_1 \cap \Pi_3 \equiv y, \quad \Pi_2 \cap \Pi_3 \equiv z.$$

Točka T zadana je koordinatama (x, y, z) , gdje x - koordinata predstavlja udaljenost točke T od ravnine Π_3 , y - koordinata udaljenost od ravnine Π_2 i z - koordinata udaljenost točke T od ravnine Π_1 . Okomite projekcije točke T na ravnine Π_1, Π_2, Π_3 s oznakama T', T'', T''' su tlocrt, nacrt i bokocrt točke. Ortogonalna projekcija točke T prikazana je na slici 2.A.1b.



(a) Koordinatni sustav i prostorni prikaz točke T

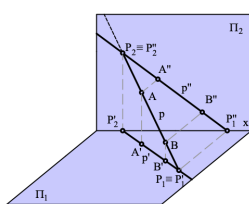


(b) Ortogonalne projekcije točke T

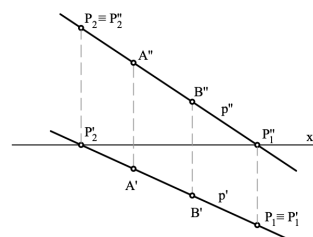
Slika 2.A.1: Točka T

2.A.2 Pravac

Pravac p u ortogonalnoj projekciji, kao i u prostoru, određen je dvjema točkama. Naravno, incidencija se čuva u ortogonalnim projekcijama. Za pravac p u ortogonalnim projekcijama vezuju se dvije bitne točke, P_1 i P_2 . S P_1 označavamo prvo probodište pravca, tj. probodište pravca p s ravninom Π_1 , a s P_2 drugo probodište pravca, tj. probodište pravca p s ravninom Π_2 . Pravac u prostoru prikazan je na slici 2.A.2a, a njegova ortogonalna projekcija na 2.A.2b.



(a) Pravac p u prostoru



(b) Pravac p u ortogonalnim projekcijama

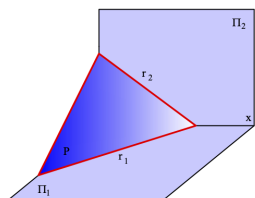
Slika 2.A.2: Pravac p

2.A.3 Ravnina

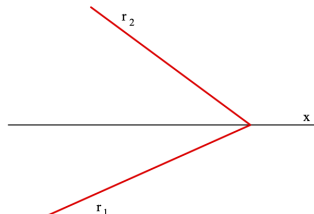
Promotrimo opću ravninu P u prostoru, vidi sliku 2.A.3a. U ortogonalnim projekcijama ravnina je određena svojim tragovima, prvim i

drugim tragom. Prvi trag ravnine je presječnica ravnine P i tlocrtne ravnine Π_1 , a drugi trag ravnine je presječnica ravnine P i nacrtne ravnine Π_2 .

Na slici 2.A.3b prikaz je ravnine u ortogonalnim projekcijama.



(a) Ravnina u prostoru



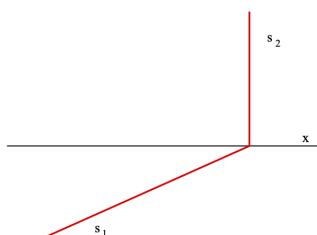
(b) Tragovi ravnine

Slika 2.A.3: Prikaz ravnine

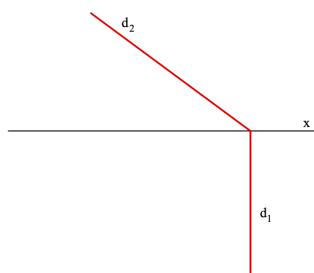
Opis slike 2.A.3b:

1. $r_1 = P \cap \Pi_1$, r_1 je prvi trag ravnine P
2. $r_2 = P \cap \Pi_2$, r_2 je drugi trag ravnine P
3. $r_1 \cap r_2 \in x$.

Ravnine okomite na Π_1 , odnosno, na Π_2 su projicirajuće ravnine i prikazane su na slikama 2.A.4a i 2.A.4b.



(a) Prva projicirajuća ravnina

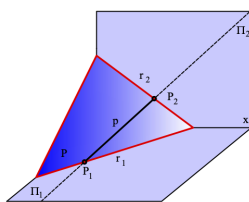


(b) Druga projicirajuća ravnina

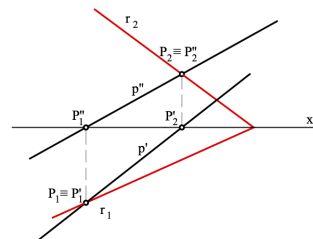
Slika 2.A.4: Projicirajuće ravnine

Točka leži na pravcu ako i samo ako projekcije točke leže na odgovarajućim projekcijama pravca.

Pravac leži u ravnini ako i samo ako probodišta pravca leže na istoimenim tragovima te ravnine, tj. $P_1 \in r_1$ i $P_2 \in r_2$.



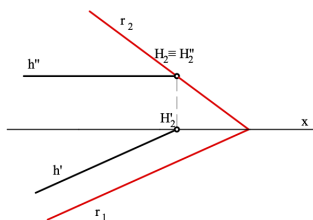
(a) Pravac u ravnini



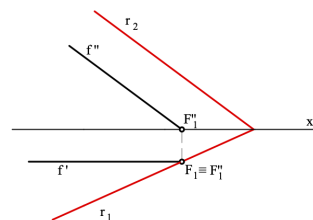
(b) Pravac u ravnini - ortogonalne projekcije

Slika 2.A.5: Pravac u ravnini

Horizontalni i frontalni pravci u ravnini primjer su pravaca ravnine u posebnom položaju:



(a) Horizontalni pravac u ravnini - ortogonalna projekcija

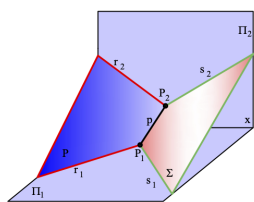


(b) Frontalni pravac u ravnini - ortogonalna projekcija

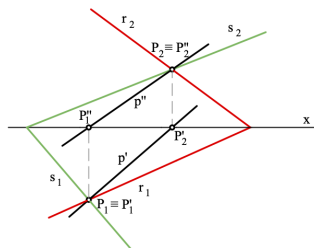
Slika 2.A.6: Horizontalni i frontalni pravci u ravnini

2.A.4 Presječnica dviju ravnina

Zajednički pravac dviju ravnina zove se *presječnica* ravnina. Pravac će biti presječnica dviju ravnina ako i samo ako probodišta pravca leže na tragovima tih ravnina, vidi sliku [2.A.7a](#).



(a) Presječnica dviju ravnina



(b) Presječnica dviju ravnina - ortogonalne projekcije

Slika 2.A.7: Presječnica dviju ravnina

Za prikaz presječnice u ortogonalnoj projekciji (slika 2.A.7b) vrijedi:

1. $P_1 \in r_1, P_1 \in s_1 \Rightarrow P_1 = r_1 \cap s_1 \wedge P_1'' \in x$
2. $P_2 \in r_2, P_2 \in s_2 \Rightarrow P_2 = r_2 \cap s_2 \wedge P_2' \in x$
3. $p' = P_1 P_2' \wedge p'' = P_1'' P_2$.

2.A.5 Probodište pravca i ravnine

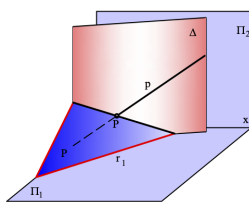
Zajednička točka ravnine P i pravca p zove se probodište pravca i ravnine.

Da bismo našli $p \cap P = N$ i u prostornom prikazu (slika 2.A.8a) i u ortogonalnim projekcijama (slika 2.A.8b), radimo isti postupak:

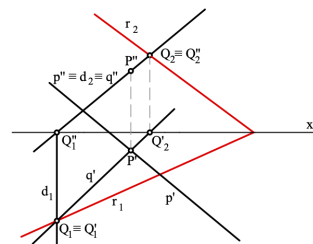
1. Pravcem p postavljamo pomoćnu ravninu Δ , u slučaju ortogonalnog projiciranja ravninu Δ biramo okomitu na Π_1 ili Π_2 .
2. Odredimo presječnicu q pomoćne ravnine Δ i polazne ravnine P .
3. Sjecište pravca p i presječnice q je traženo probodište N .

U ortogonalnim projekcijama to se svodi na sljedeće:

1. $p \subset \Delta(d_1, d_2)$, npr. $\Delta(d_1, d_2) \perp \Pi_2 \Rightarrow d_2 \equiv p'', d_1 \perp x$
2. $\Delta(d_1, d_2) \cap P(r_1, r_2) = q, q'' \equiv d_2, q' \equiv Q_1 Q_2'$
3. $p \cap q = N \Rightarrow p' \cap q' = N', N'' \in p''$.



(a) Probodište pravca i ravnine

(b) Probodište pravca i ravnine -
ortogonalne projekcije

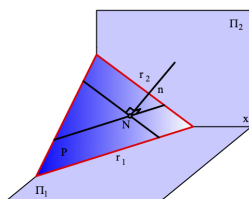
Slika 2.A.8: Probodište pravca i ravnine

2.A.6 Pravac okomit na ravninu

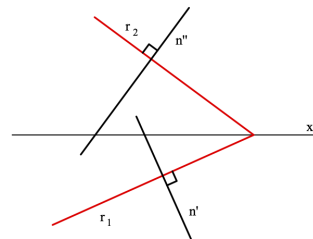
Pravac n okomit je na ravninu P ako je okomit na barem dva, a onda i na sve pravce te ravnine (slika 2.A.9a).

Pravac n nazivamo *okomicom* ili *normalom*. U ortogonalnim projekcijama (slika 2.A.9b) vrijedi

$$n \perp P(r_1, r_2) \Rightarrow n' \perp r_1 \wedge n'' \perp r_2.$$



(a) Pravac okomit na ravninu

(b) Pravac okomit na ravninu -
ortogonalne projekcije

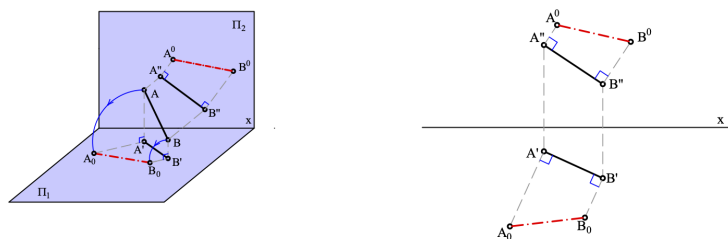
Slika 2.A.9: Pravac okomit na ravninu

2.B METRIČKI ZADATCI

2.B.1 Udaljenost dviju točaka

Vidi Poglavlje 1.7, sliku 1.7.2.

Ako tražimo prostornu udaljenost dviju točaka A i B (slika 2.B.1a) tada u ortogonalnim projekcijama rotiramo trapez $ABB'A'$ oko $A'B'$ u Π_1 ili trapez $ABB''A''$ oko $A''B''$ u ravninu Π_2 (slika 2.B.1b).



(a) Udaljenost dviju točaka

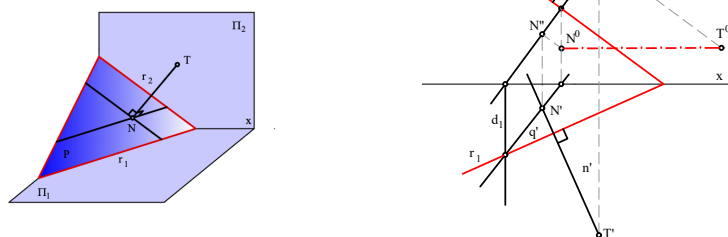
(b) Prava veličina udaljenosti dviju točaka

Slika 2.B.1: Udaljenost dviju točaka

2.B.2 Udaljenost točke od ravnine

Vidi Zadatak 35, sliku 2.2.9.

Odredite udaljenost točke T od ravnine P , $T \notin P$.



(a) Udaljenost točke od ravnine

(b) Udaljenost točke od ravnine - ortogonalne projekcije

Slika 2.B.2: Udaljenost točke od ravnine

Prostorno rješenje:

1. $T \in n$, $n \perp P$ (vidi 2.A.6 Pravac okomit na ravninu)
2. $n \cap P = N$ (vidi 2.A.5 Probodište pravca i ravnine)
3. $d(T, N)$ (vidi 2.B.1 Udaljenost dviju točaka).

Svaki od ovih koraka riješen je u prethodnim promatranjima. Prikaz takvog rješenja u ortogonalnim projekcijama dan je na slici 2.B.2b.

2.B.3 Udaljenost točke od pravca

Vidi zadatak 37 i sliku 2.2.11.

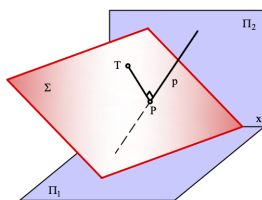
Odredite udaljenost točke od pravca, $T \notin p$.

Kod prostornog rješenja spustimo normalu iz točke T na pravac p . Takvo rješenje nije moguće u ortogonalnim projekcijama osim u specijalnim slučajevima. Stoga radimo sljedeće:

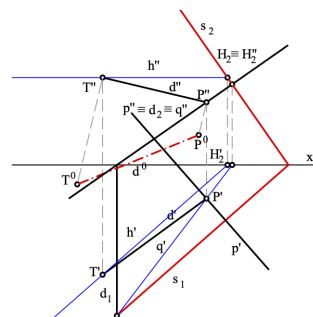
1. $T \in \Sigma, \Sigma \perp p$
2. $p \cap \Sigma = P$
3. $d(T, p) = d(T, P)$.

Kako postaviti točkom T ravninu Σ okomito na pravac p ?

1. a) $T \in h, h \parallel \Pi_1, h \in \Sigma(s_1, s_2) \Rightarrow T' \in h', h' \perp p' \wedge T'' \in h'', h'' \parallel x$ (vidi sliku 2.A.6a)
- b) $H'_2 = h' \cap x \wedge H''_2 \in h''$
- c) $H''_2 \in s_2 \wedge s_2 \perp p'', s_1 \perp p'$.
2. $p \cap \Sigma(s_1, s_2) = P$ (vidi 2.A.5 Probodište pravca i ravnine)
3. $d(T, p) = d(T, P)$ (vidi 2.B.1 Udaljenost dviju točaka).



(a) Udaljenost točke od pravca



(b) Udaljenost točke od pravca -
ortogonalne projekcije

Slika 2.B.3: Udaljenost točke od pravca

Studentima prepuštamo da pronađu još poveznica.

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Definicija 7: **Funkcija** ili **preslikavanje** uređena je trojka (D, K, f) koja sadrži skup D koji nazivamo područje definicije ili **domena** funkcije, skup K koji nazivamo područje vrijednosti ili **kodomena** funkcije i neko pravilo $f: D \rightarrow K$ po kojem se svakom $x \in D$ pridružuje jedinstveni $y \in K$ takav da je $y = f(x)$.

Definicija 8: **Slika funkcije** je skup

$$R(f) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq K.$$

Definicija 9: Skup

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

nazivamo **graf funkcije** f .

Definicija 10: Za funkciju $f: D \rightarrow K$ kažemo da je **surjekcija** ako za svaki $y \in K$ postoji barem jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. Drugim riječima, funkcija f je surjekcija ako je slika funkcije jednaka kodomeni. Za funkciju $f: D \rightarrow K$ kažemo da je **injekcija** ako vrijedi sljedeće:

$$\text{za sve } x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Za funkciju $f: D \rightarrow K$ kažemo da je **bijekcija** ako je funkcija surjekcija i injekcija.

Definicija 11: Neka su $f: A \rightarrow B$ i $g: C \rightarrow D$ dvije funkcije. Ako je $R(f) \subseteq C$, tada je jedinstveno određena funkcija $h: A \rightarrow D$ takva da je $h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ koju nazivamo **kompozicija funkcija** f i g .

Definicija 12: Neka su $f: D \rightarrow K$ i $g: K \rightarrow D$ funkcije. Kažemo da je g **inverzna funkcija** funkcije f ako vrijedi

$$(g \circ f)(x) = x, \text{ za svaki } x \in D,$$

$$(f \circ g)(y) = y, \text{ za svaki } y \in K.$$

Inverznu funkciju označavamo s $g = f^{-1}$.

Inverzna funkcija postoji samo za bijektivne funkcije. Graf inverzne funkcije f^{-1} simetričan je grafu funkcije f obzirom na pravac $y = x$.

Definicija 13: Neka je $D_g \subseteq D_f$ i $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in D_g$. Funkciju g nazivamo **restrikcija ili suženje funkcije** f (oznaka $g = f|_{D_g}$), a funkciju f **ekstenzija ili proširenje funkcije** g .

Mi ovdje proučavamo funkcije u kojima su $D \subseteq \mathbb{R}$ i $K \subseteq \mathbb{R}$, tj. kod kojih su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva.

Definicija 14: Funkciju f nazivamo **periodičnom** ako postoji realan pozitivan broj P takav da vrijedi

$$f(x + P) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Broj P nazivamo **period funkcije** f .

Definicija 15: Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$x \in D \Rightarrow -x \in D,$$

tj. D je **simetričan skup** s obzirom na ishodište.

Kažemo da je $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ **parna funkcija** ako vrijedi

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Kažemo da je $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ **neparna funkcija** ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D.$$

Definicija 16: Kažemo da funkcija f **raste (strogo raste)** na području $S \subseteq D$ ako je

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$

za sve $x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2$.

Kažemo da funkcija f **pada (strogo pada)** na području $S \subseteq D$ ako je

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

za sve $x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2$.

Osnovne elementarne funkcije su:

- polinomi
- racionalne funkcije
- eksponencijalne funkcije
- logaritamske funkcije
- opća potencija
- trigonometrijske funkcije
- ciklometrijske funkcije.

Elementarne funkcije su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elemenarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija i konačnog broja njihovih kompozicija.

POLINOMI

Polinom n -tog stupnja je funkcija $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblika

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$$

Realne brojeve $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazivamo **koeficijentima** polinoma. Za $n = 0$ dobivamo konstantu $p(x) = a_0$, za $n = 1$ linearnu funkciju $p(x) = a_1 x + a_0$, a za $n = 2$ kvadratnu funkciju $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

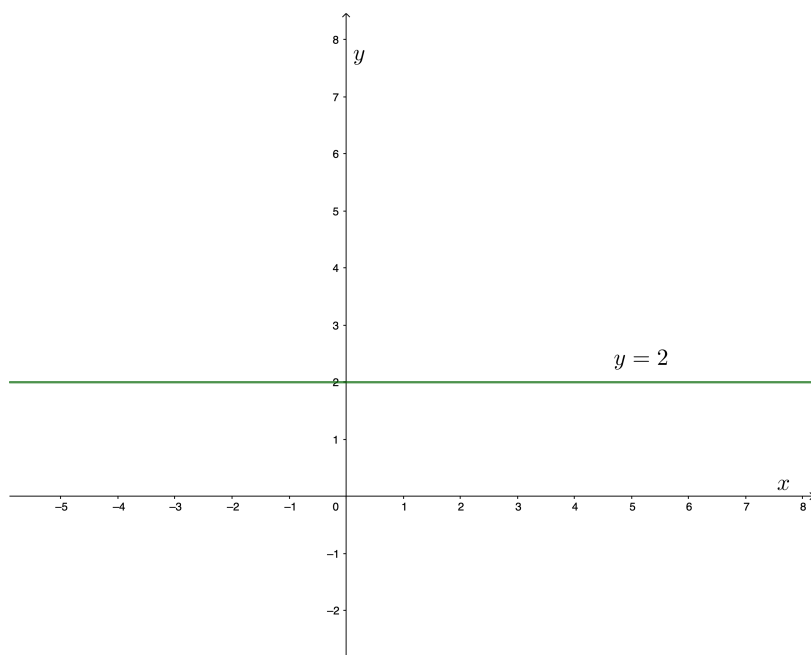
Konstantna funkcija je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblika

$$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da je konstantna funkcija polinom stupnja 0.

Primjer 6. Na slici 3.0.1 prikazan je graf konstante

$$f(x) = 2.$$



Slika 3.0.1: Graf konstantne funkcije

Linearna funkcija je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblika

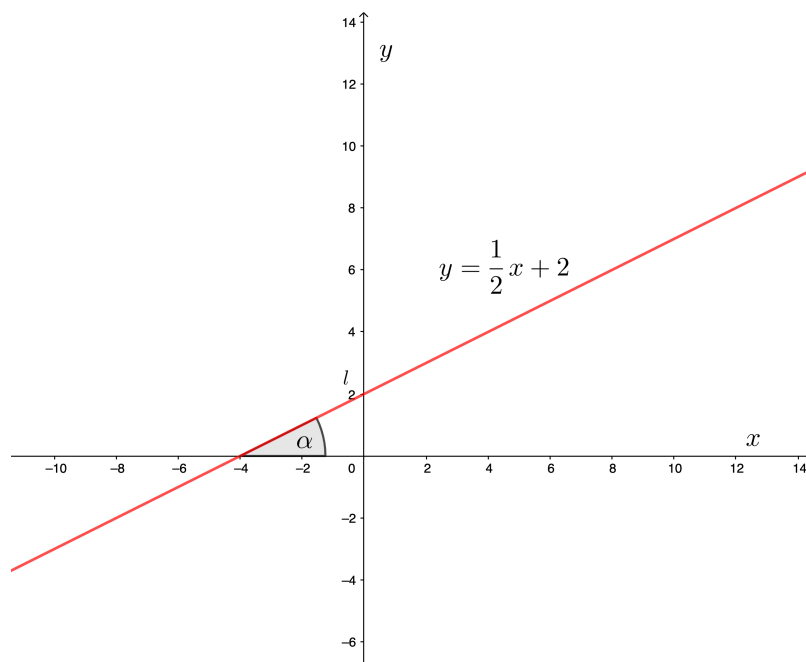
$$f(x) = kx + l, \quad k \neq 0, \quad l \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da je linearna funkcija polinom stupnja 1. Graf linearne funkcije je pravac $y = f(x)$. Broj k naziva se koeficijent smjera, a

predstavlja tangens kuta α kojeg pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi x . Ako je $k > 0$ funkcija raste, a ako je $k < 0$ funkcija pada. Broj l je odsječak pravca na osi y . Nultočka linearne funkcije je broj x za koji je $f(x) = 0$.

Primjer 7. Na slici 3.0.2 prikazan je graf linearne funkcije

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2.$$



Slika 3.0.2: Graf linearne funkcije

Kvadratna funkcija je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblika

$$f(x) = a^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da je kvadratna funkcija polinom stupnja 2. Graf kvadratne funkcije je parabola $y = f(x)$. Kvadratnu funkciju možemo zapisati u sljedećem faktoriziranom obliku:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdje su x_1, x_2 nultočke kvadratne funkcije. Nultočke kvadratne funkcije rješenja su jednadžbe $f(x) = 0$ i računamo ih po formuli:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Koordinate tjemena $T(x_T, y_T)$ parabole $y = f(x)$ računamo po formuli

$$x_T = -\frac{b}{2a}, y_T = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

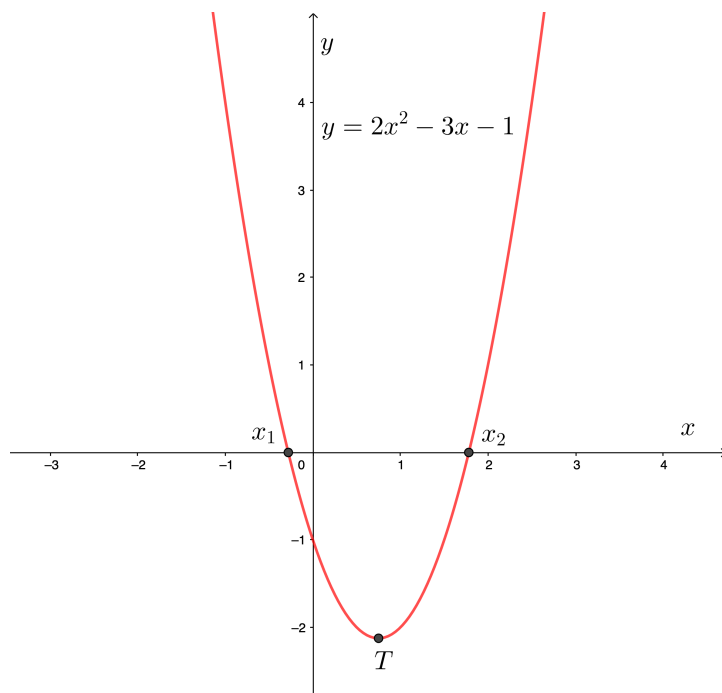
Za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe vrijede i Vièteove formule

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Primjer 8. Na slici 3.0.3 prikazan je graf kvadratne funkcije

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 1.$$



Slika 3.0.3: Graf kvadratne funkcije

RACIONALNE FUNKCIJE

Funkcija f oblika $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$, gdje su $p(x)$ i $q(x)$ polinomi, naziva se **racionalna funkcija**. Ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, onda kažemo da je to **prava racionalna funkcija**.

EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

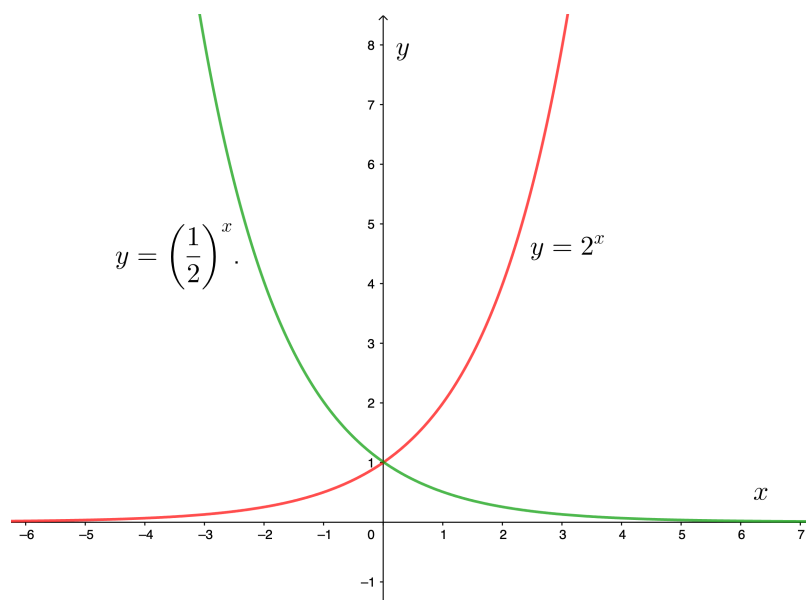
Funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ oblika $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ zovemo **eksponencijalna funkcija s bazom a**.

Eksponencijalna funkcija ima sljedeća svojstva:

- $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
- $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$

- $a^0 = 1$
- za $a > 1$ funkcija je strogo rastuća
- za $0 < a < 1$ funkcija je strogo padajuća.

Primjer 9. Na slici 3.0.4 prikazani su grafovi eksponencijalnih funkcija $f(x) = 2^x$ i $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Slika 3.0.4: Graf eksponencijalne funkcije

LOGARITAMSKE FUNKCIJE

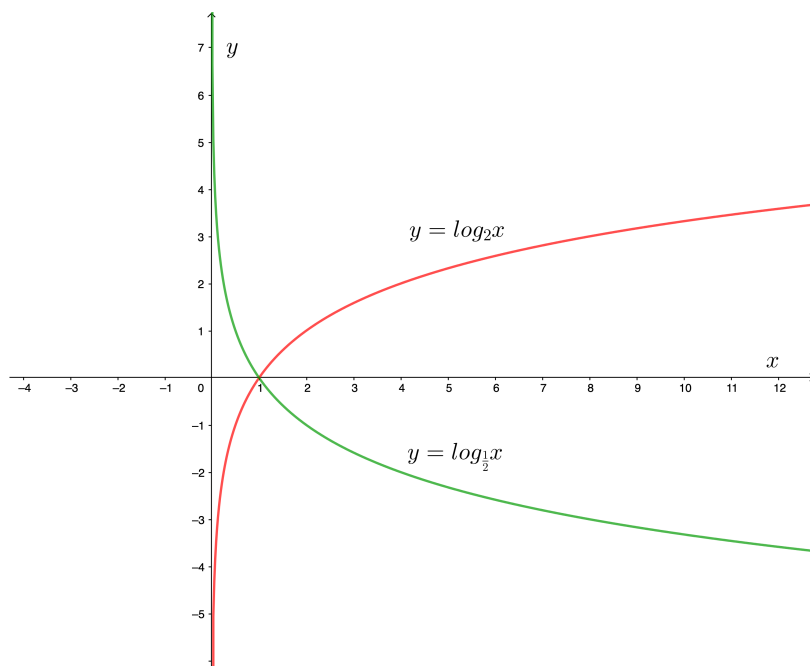
Logaritamska funkcija s bazom a , $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$, inverzna je funkcija eksponencijalne funkcije $g(x) = a^x$.

Logaritamska funkcija ima sljedeća svojstva:

- $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- za $a > 1$ funkcija je strogo rastuća
- za $0 < a < 1$ funkcija je strogo padajuća.

Logaritam s bazom $a = e$, gdje je e matematička konstanta aproksimativnog iznosa $e = 2.71828$, nazivamo **prirodni logaritam** i označavamo ga s $f(x) = \ln x$. Logaritam s bazom $a = 10$ nazivamo **dekadski logaritam** i označavamo ga s $f(x) = \log x$.

Primjer 10. Na slici 3.0.5 prikazani su grafovi logaritamskih funkcija $f(x) = \log_2 x$ i $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.



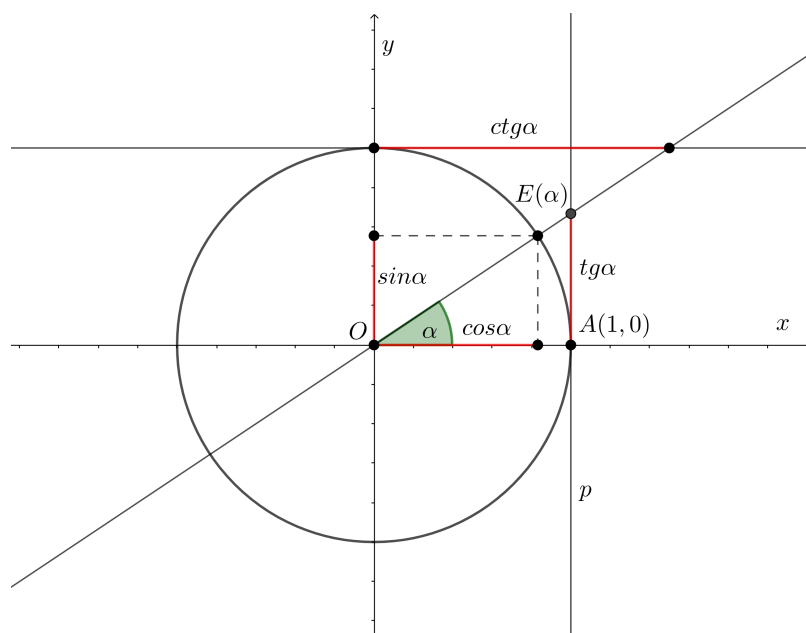
Slika 3.0.5: Graf logaritamske funkcije

OPĆA POTENCIJA

Funkciju $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ oblika

$f(x) = x^c = (e^{\ln x})^c = e^{c \ln x}$, $x > 0, c \in \mathbb{R}$ nazivamo **opća potencija**.

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE



Slika 3.0.6: Trigonometrijska kružnica

Promotrimo kružnicu sa središtem u ishodištu radijusa 1. Neka je pravac p tangenta na kružnicu u točki $A(1,0)$. Namatanjem brojevnog pravca p na kružnicu $k(O,1)$ definirano je preslikavanje koje svakom realnom broju $t \in p$ pridruži točku $E(t) \in k(O,1)$, gdje je početak u točki $A(1,0)$ i kreće se u pozitivnom smjeru. Ovo preslikavanje nazivamo **eksponencijalno preslikavanje**. U svaku točku kružnice preslika se beskonačno mnogo točaka brojevnog pravca jer vrijedi

$$E(t) = E(t + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcija kosinus definirana je kao apscisa, a funkcija sinus kao ordinata točke $E(t)$ na brojevnoj kružnici.

Funkcija tangens definirana je kao omjer funkcija sinus i kosinus nekog kuta, tj.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos x \neq 0.$$

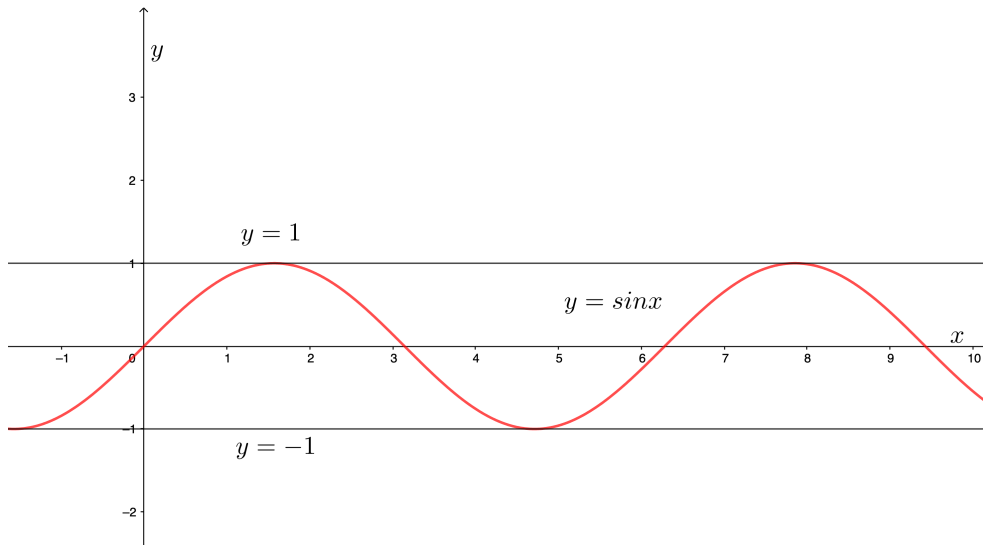
Dakle, tangens možemo promatrati kao nagib pravca koji zatvara taj kut s pozitivnim dijelom osi x .

Funkcija kotangens definirana je kao omjer funkcija kosinus i sinus nekog kuta, tj.

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sin x \neq 0.$$

Na sljedećim slikama prikazani su grafovi trigonometrijskih funkcija sinus, kosinus, tangens i kotangens.

Funkcija $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$:

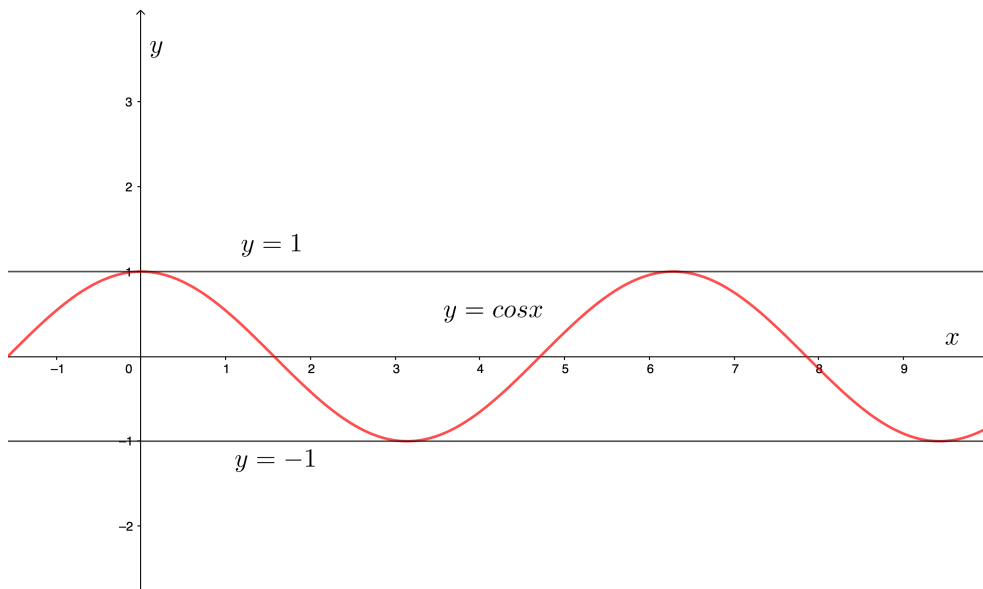


Slika 3.0.7: Graf funkcije sinus

Funkcija sinus ima sljedeća svojstva:

- $\sin(-x) = -\sin x$, $\forall x$ (funkcija je neparna)
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\forall x$ (funkcija je periodična).

Funkcija $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$:



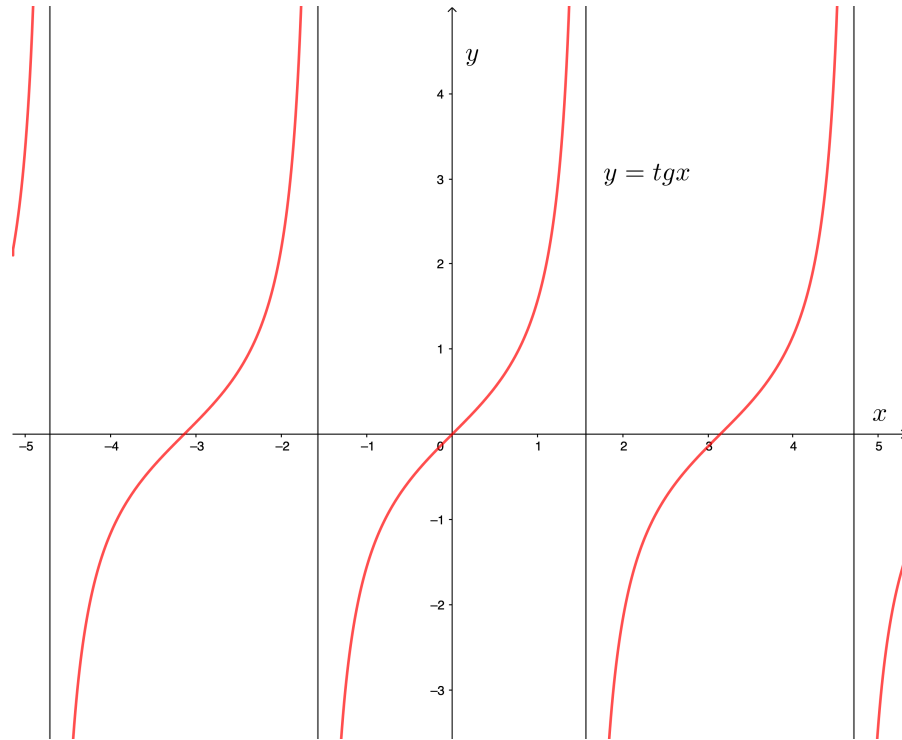
Slika 3.0.8: Graf funkcije kosinus

Funkcija kosinus ima sljedeća svojstva:

- $\cos(-x) = \cos x$, $\forall x$ (funkcija je parna)

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \forall x$ (funkcija je periodična).

Funkcija $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$:

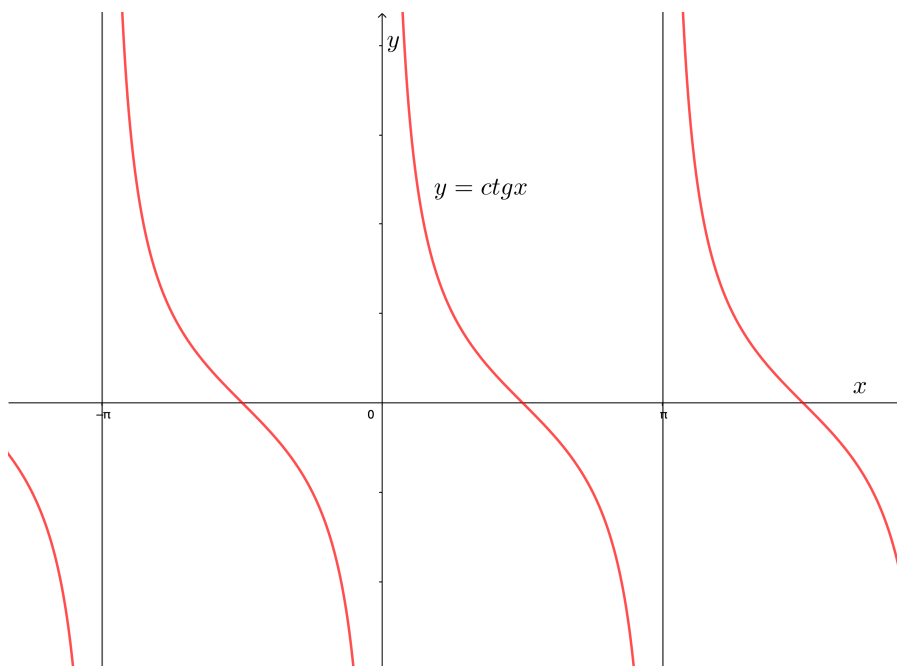


Slika 3.0.9: Graf funkcije tangens

Funkcija tangens ima sljedeća svojstva:

- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \forall x$ (funkcija je neparna)
- $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \forall x$ (funkcija je periodična).

Funkcija $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$:



Slika 3.0.10: Graf funkcije kotangens

Funkcija kotangens ima sljedeća svojstva:

- $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}x$, $\forall x$ (funkcija je neparna)
- $\text{ctg}(x + \pi) = \text{ctg}x$, $\forall x$ (funkcija je periodična).

Trigonometrijski identiteti

Često ćemo u računskim operacijama s trigonometrijskim funkcijama koristiti tzv. trigonometrijske identitete.

Osnovni su trigonometrijski identiteti

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$$

$$\text{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0$$

$$\text{tj. } \text{tg}x = \frac{1}{\text{ctg}x}.$$

Formule redukcije za sinus i kosinus funkciju su

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Trigonometrijske funkcije zbroja i razlike su

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta su

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}.$$

Trigonometrijske funkcije polovičnog kuta su

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Transformacija umnoška u zbroj je

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)].$$

Transformacija zbroja u umnožak je

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

Ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije restrikcija trigonometrijskih funkcija.

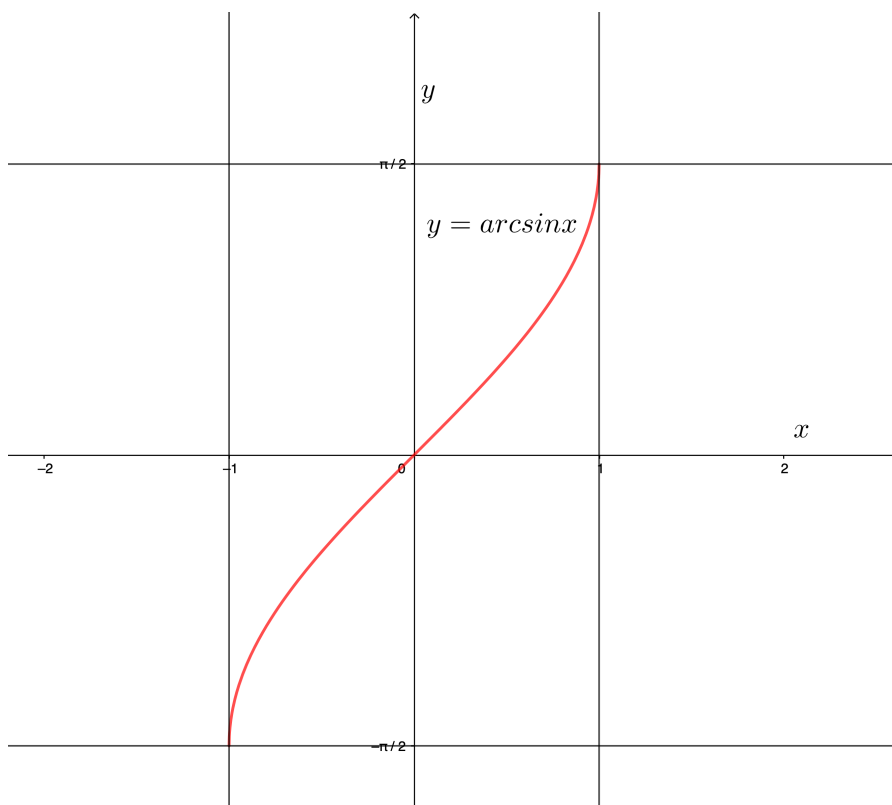
Funkcija sinus je surjekcija, ali nije injekcija. Zato radimo restrikciju funkcije sinus na neki interval kako bi postala injekcija, ali također da ostane surjekcija. Tako dobivamo funkciju

$$\text{Sin} = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

koja je bijekcija pa ima inverznu funkciju

$$\arcsin = \text{Sin}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

koju nazivamo **arkus sinus**.



Slika 3.0.11: Graf funkcije arkus sinus

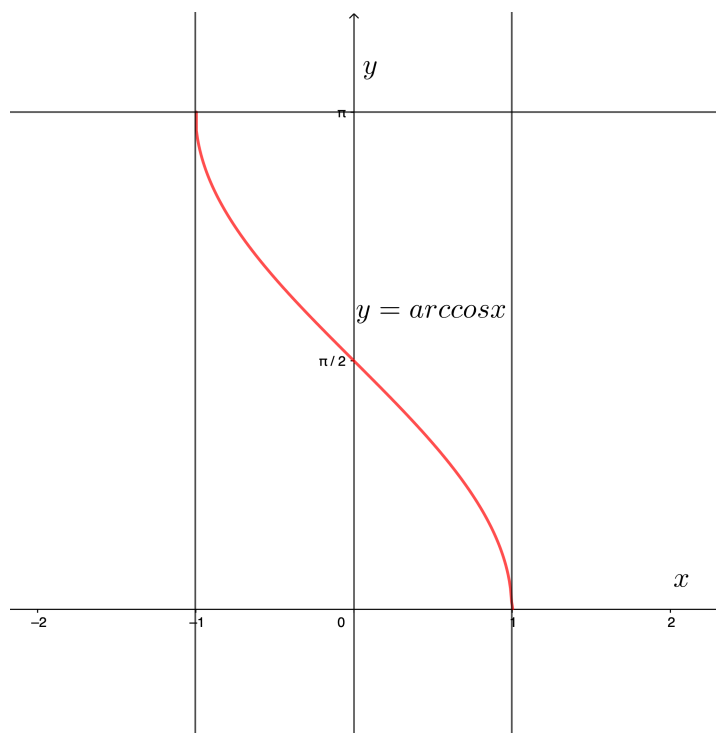
Sad napravimo restrikciju funkcije kosinus na interval $[0, \pi]$ kako bi postala injekcija, ali također da ostane surjekcija. Tako dobivamo funkciju

$$\text{Cos} = \cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

koja je bijekcija pa ima inverznu funkciju

$$\arccos = \text{Cos}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

koju nazivamo **arkus kosinus**.



Slika 3.0.12: Graf funkcije arkus kosinus

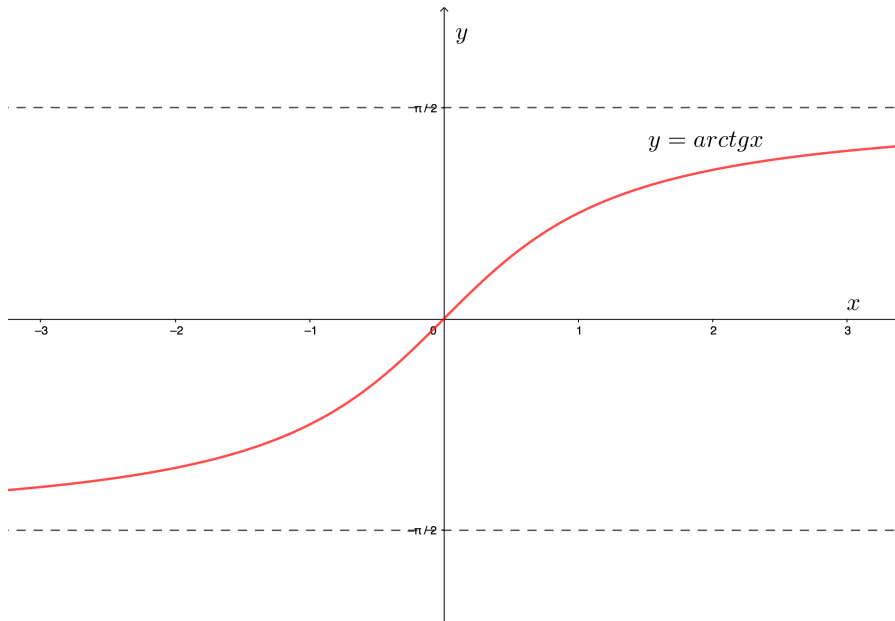
Napravimo restrikciju funkcije tangens na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Tako dobivamo funkciju

$$\text{Tg} = \text{tg}|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

koja je bijekcija pa ima inverznu funkciju

$$\text{arctg} = \text{Tg}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

koju nazivamo **arkus tangens**.



Slika 3.0.13: Graf funkcije arkus tangens

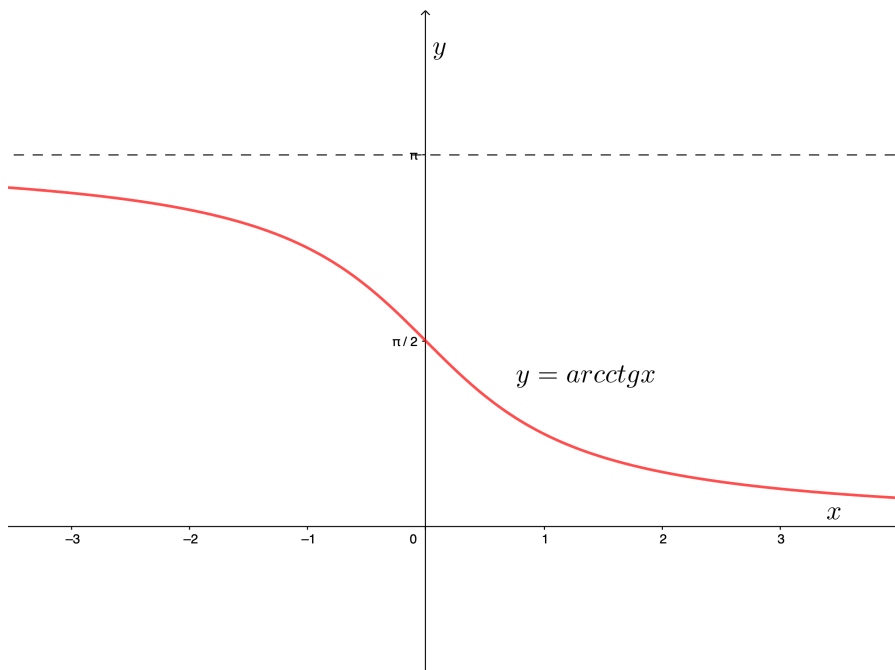
Napravimo restrikciju funkcije kotangens na interval $\langle 0, \pi \rangle$. Tako dobivamo funkciju

$$\text{Ctg} = \text{ctg}|_{\langle 0, \pi \rangle} : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

koja je bijekcija pa ima inverznu funkciju

$$\text{arcctg} = \text{Ctg}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \pi \rangle$$

koju nazivamo **arkus kotangens**.

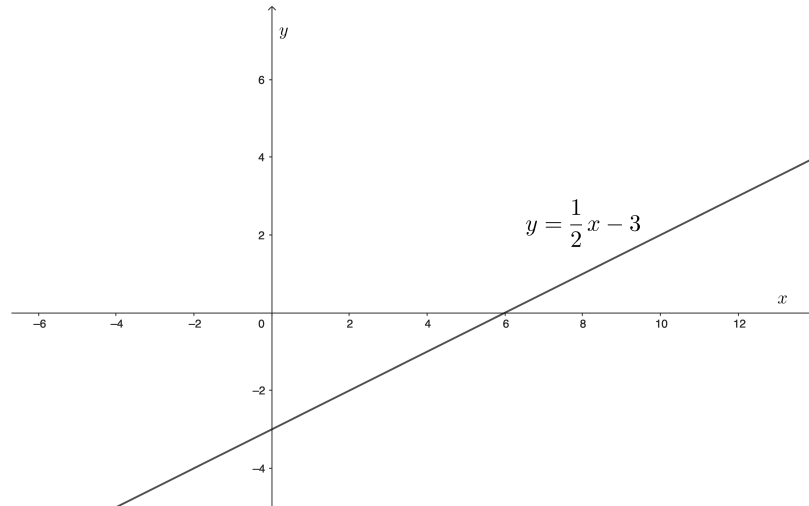


Slika 3.0.14: Graf funkcije arkus kotangens

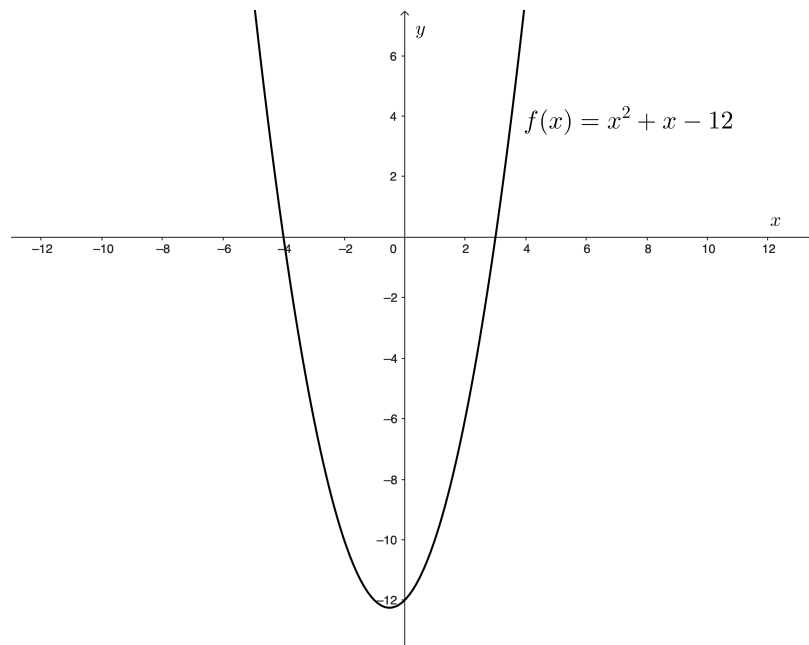
ZADATCI ZA VJEŽBU

1. Skicirajte grafove funkcija:

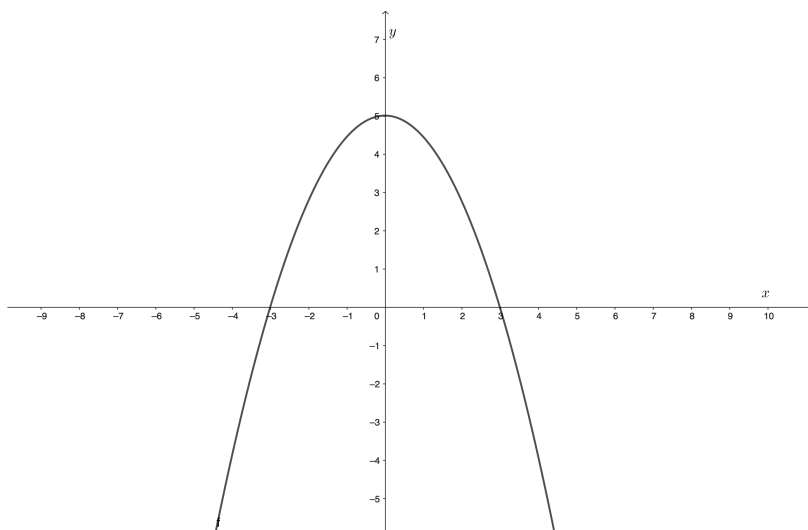
(a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

Rješenje:Slika 3.0.15: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

(b) $f(x) = x^2 + x - 12$.

Rješenje:Slika 3.0.16: Graf funkcije $f(x) = x^2 + x - 12$

2. Pronađite kvadratnu funkciju zadanu grafom.



Slika 3.0.17: Graf kvadratne funkcije

Rješenje: $f(x) = -\frac{5}{9}x^2 + 5$.

3. Riješi jednađžbe:

(a) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Rješenje: $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Rješenje: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. Riješi jednađžbe:

(a) $\ln x + 1 = 0$

Rješenje: $x = e^{-1}$

(b) $e^{2x} = 1$

Rješenje: $x = 0$.

5. Dokaži sljedeće trigonometrijske identitete:

(a) $\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin x \sin 3x} = -2$

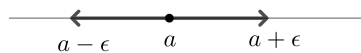
(b) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -\operatorname{ctg} x$

(c) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = 2 \sin x$.

LIMESI

Granična vrijednost ili limes funkcije koristi se kako bismo opisali ponašanje funkcije kad se njen argument približava nekoj točki ili kad argument postaje proizvoljno velik, tj. raste u beskonačnost. Granične vrijednosti ćemo u nastavku ovog poglavlja i u idućem poglavlju koristiti kako bismo definirali neprekidnost i derivaciju funkcije.

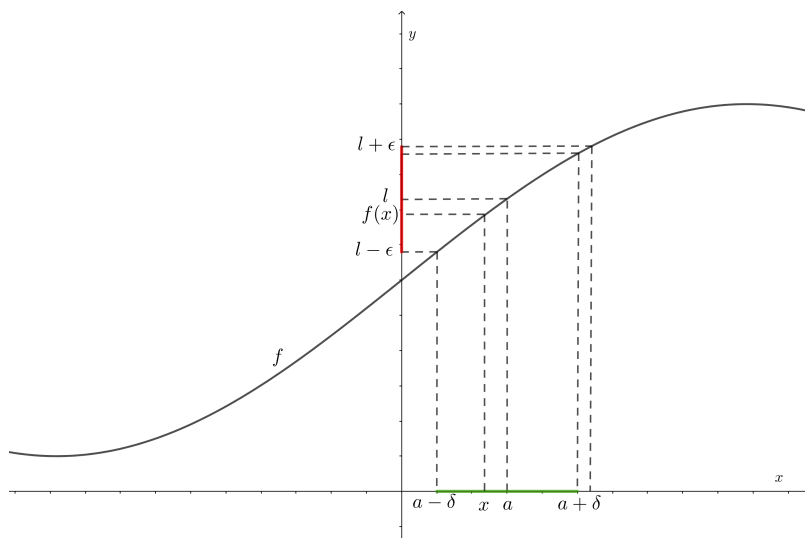
Definicija 17: Neka je $\epsilon > 0$ i $a \in \mathbb{R}$. Otvoreni interval $\langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ zovemo **okolina** točke a .



Slika 4.0.1: Okolina točke a

Definicija 18: Cauchyjeva definicija limesa

Neka je dana funkcija $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Za realan broj l kažemo da je limes funkcije f u točki $a \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\langle a - \delta, a + \delta \rangle \setminus \{a\} \subseteq D_f$ i da iz $x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$ slijedi $f(x) \in \langle l - \epsilon, l + \epsilon \rangle$.



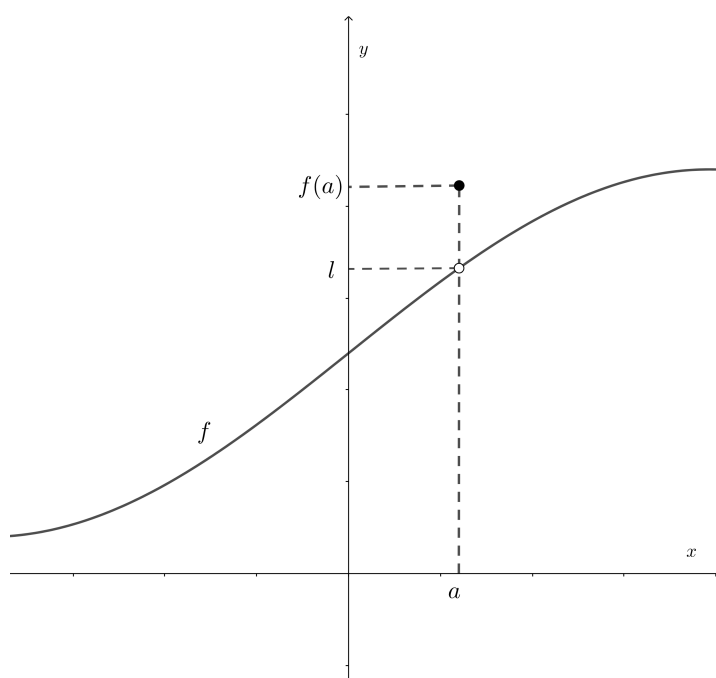
Slika 4.0.2: Limes funkcije f u točki a .

Dakle, ako postoji realan broj l takav da funkcijske vrijednosti $f(x)$ teže prema točki l kad nezavisna varijabla x teži prema točki a , onda kažemo da je točka l **limes funkcije f u točki a** i pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

Iz gornje definicije vidimo da je za pojam limesa funkcije f u točki a potrebno da funkcija bude definirana na nekoj okolini točke a , ali ne nužno i u točki a .

Također možemo zaključiti da ako i postoji funkcijska vrijednost u točki a , ona se ne mora poklapati s limesom funkcije u točki a , što je prikazano na slici 4.0.3.



Slika 4.0.3: Vrijednost funkcije f u točki a nije jednaka limesu funkcije f u točki a

Definicija 19: Neka je $a \in D_f$. Ako postoji $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, onda kažemo da je **funkcija f neprekidna u točki a** . Kažemo da je **funkcija f neprekidna na skupu $S \subseteq D_f$** ako je neprekidna u svakoj točki $x \in S$.

Možemo zaključiti da funkcija sa slike 4.0.3 nije neprekidna u točki a .

Nezavisna varijabla x može težiti točki a s lijeva i zdesna i ti limesi ne moraju biti jednaki.

Vrijednost l je **limes s lijeva** funkcije f u točki a , odnosno

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da iz $x \in D_f \cap \langle a - \delta, a \rangle$ slijedi $|f(x) - l| < \epsilon$.

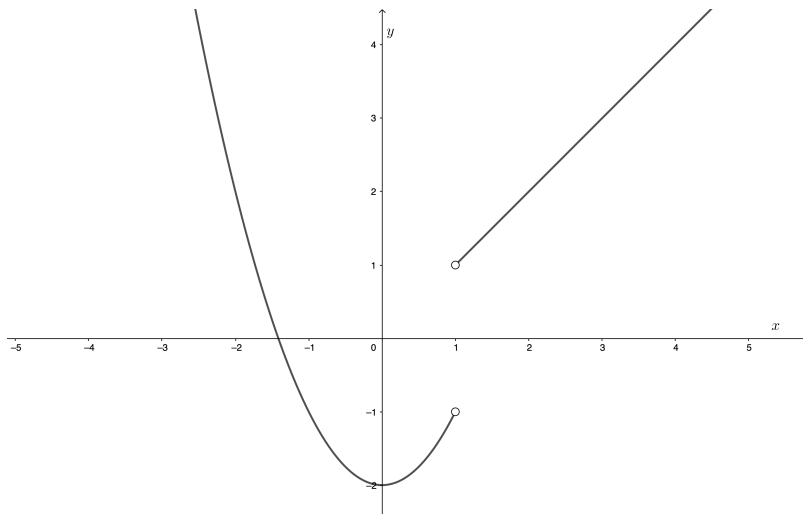
Slično, vrijednost l je **limes s desna** funkcije f u točki a , odnosno

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da iz $x \in D_f \cap \langle a, a + \delta \rangle$ slijedi $|f(x) - l| < \epsilon$.

Primjer 11. Nacrtajmo graf funkcije f zadane s

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$



Slika 4.0.4: Limes funkcije u točki

Vidimo da gornja funkcija nema limes u točki 1 jer ako se točki 1 približavamo s lijeve strane, funkcijske vrijednosti teže prema -1 , a ako se približavamo s desne strane, funkcijske vrijednosti teže prema 1.

Kod računanja limesa funkcija koristimo osnovna svojstva limesa koja ćemo sad navesti. Neka funkcije f i g imaju limese u točki x_0 . Tada vrijedi:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x)^{g(x)} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$

Posebno vrijedi $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

U nastavku ćemo bez dokaza navesti nekoliko osnovnih limesa funkcija koje ćemo koristiti kod računanja limesa ostalih funkcija:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Kod računanja limesa mogu se pojaviti **neodređeni oblici** $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 . Svi ti oblici transformacijama se svode na jedan od oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ kod kojih možemo koristiti **L'Hospitalovo pravilo**. Njega ćemo uvesti kao jednu od primjena diferencijalnog računa. Do tad ćemo se koristiti drugim tehnikama računanja limesa.

Zadatak 42. Izračunajte limese:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x - 21}{x^3 - 3x^2}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x - 21}{x^3 - 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 7x - 3x - 21}{x^2(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+7) - 3(x+7)}{x^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+7)}{x^2(x-3)} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{x^2 + 5}}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{9 - (x^2 + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{4 - x^2} \\ &= 3 + \sqrt{4 + 5} = 6. \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x \sin x}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{3x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{3x \sin x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x \cos 4x} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 4x} = 4. \end{aligned}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2 \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+1)}{x}$$

Rješenje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+1)}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+1)}{5x} = 5.$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}}$$

Rješenje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{6}{3x}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x}} \right)^6 = e^6.$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^x}{x}$$

Rješenje:

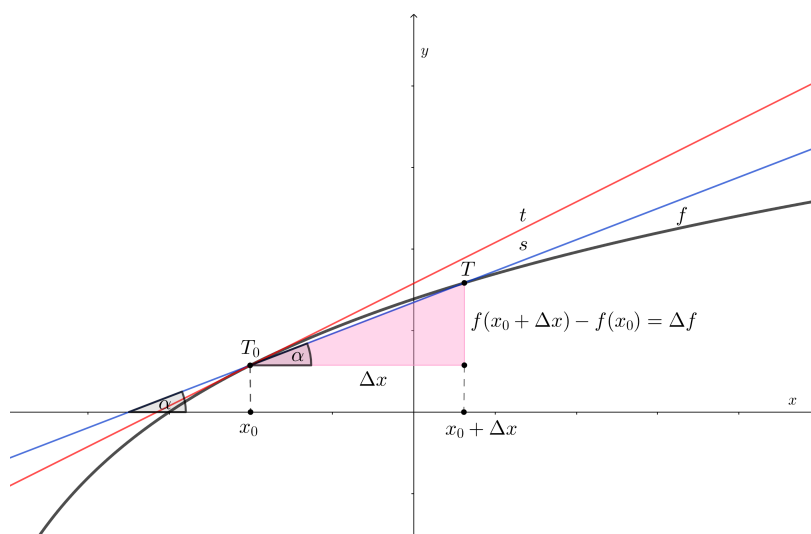
$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{3x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x(e^{3x} - 1)}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3e^x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3. \end{aligned}$$

DERIVACIJE

Derivacija funkcije zajedno s integralnim računom čini osnovu infinitezimalnog računa koji ima široku primjenu u znanosti i inženjerstvu. Povijesno su dva po prirodi različita problema bila glavna motivacija za razvoj diferencijalnog računa. Jedan od njih je fizički problem definiranja pojma brzine. Drugi problem je geometrijske naravi, a odnosi se na pitanje postojanja jedinstvene tangente u nekoj točki grafa funkcije f .

Derivacija opisuje brzinu promjene funkcije u odnosu na promjenu argumenta funkcije.

5.1 DEFINICIJA DERIVACIJE



Slika 5.1.1: Definicija derivacije

Označimo točke $T_0(x_0, f(x_0))$ i $T(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ na grafu funkcije f . Prisjetimo se da je koeficijent smjera pravca jednak tangensu kuta koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi x . Pravac s kroz točke T_0 i T nazivamo **sekantom grafa funkcije f** . Vidimo da je koeficijent smjera sekante

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Kad $\Delta x \rightarrow 0$, točka T se po grafu funkcije "giba" do točke T_0 i sekanta s prelazi u pravac t kojeg nazivamo **tangentom na graf funkcije f u točki x_0** . Dakle, ako postoji $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$, on će nam dati koeficijent smjera tangente funkcije f u točki x_0 . Taj limes nazivamo **derivacija funkcije f u točki x_0** i definiramo ga kao

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Kažemo da je funkcija f **derivabilna u točki x_0** ako postoji limes $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Funkcija f je **derivabilna na intervalu $\langle a, b \rangle$** ako je derivabilna u svakoj točki tog intervala. Za funkciju f kažemo da je **derivabilna** ako je derivabilna na cijelom području definicije. Kao što smo već rekli,

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Dakle, jednadžba tangente na graf funkcije f u točki x_0 je

$$t \dots y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Označimo s D'_f skup svih točaka domene D_f funkcije f u kojima postoji derivacija $f'(x_0)$. Funkciju

$$x \mapsto f'(x), \quad x \in D'_f$$

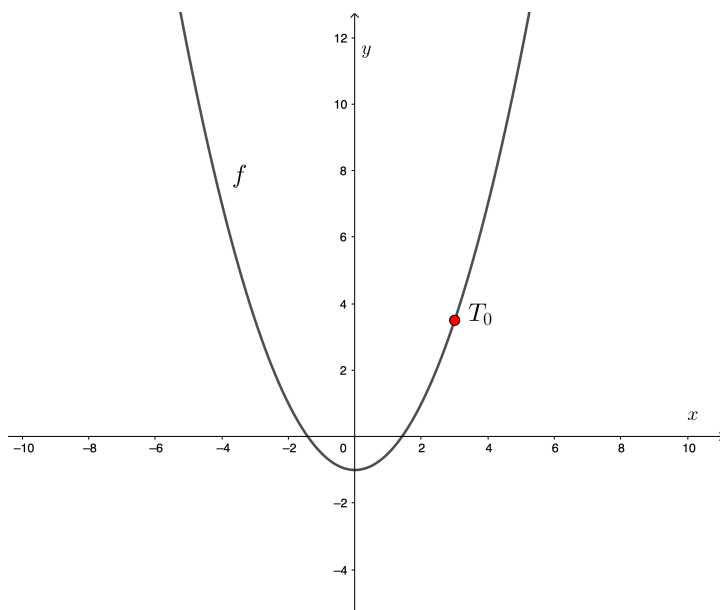
nazivamo **derivacija funkcije f** .

Dakle, **derivacija funkcije u točki** realan je broj, a **derivacija funkcije** je nova funkcija koja će svakoj točki domene pridružiti koeficijent smjera tangente u toj točki.

Derivabilnu funkciju f kojoj je derivacija f' neprekidna funkcija nazivamo **neprekidno derivabilna ili glatka funkcija**.

Zadatak 43. *Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ u točki $x_0 = 3$ koristeći se definicijom derivacije funkcije.*

Rješenje: Dakle, moramo odrediti tangentu kvadratne funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ u danoj točki T_0 .



Slika 5.1.2: Zadani elementi zadatka 43

Najprije odredimo koordinatu y_0 točke T_0 :

$$y_0 = f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 1 = \frac{7}{2}.$$

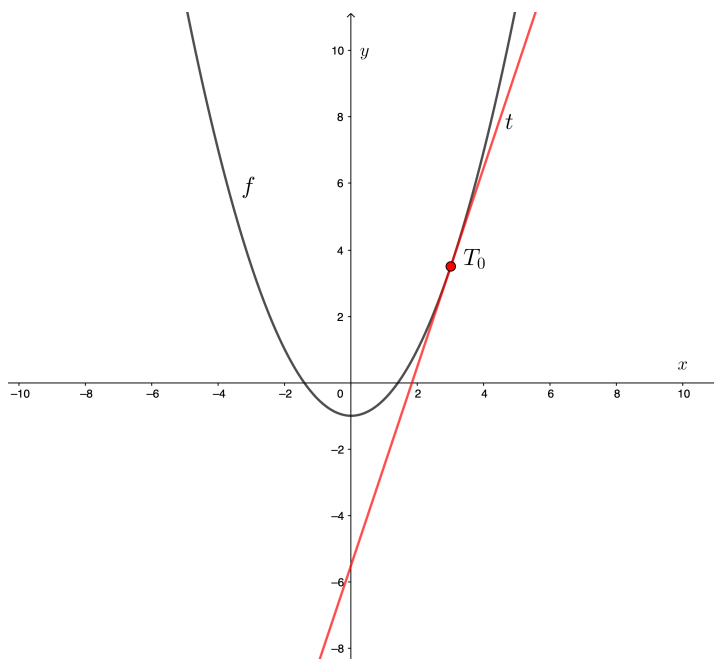
Sad odredimo koeficijent smjera tangente u točki T_0 koristeći se definicijom derivacije:

$$\begin{aligned} k = f'(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(3 + \Delta x)^2 - 1 - [\frac{1}{2} \cdot 3^2 - 1]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(3 + \frac{1}{2}\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 3. \end{aligned}$$

Jednadžba tangente glasi

$$t \cdots y = 3x - \frac{11}{2}.$$

Ako funkciju f i pravac t prikažemo grafički, možemo se uvjeriti da je t tangenta na graf u točki T_0 .



Slika 5.1.3: Rješenje zadatka 43

Zadatak 44. Koristeći se definicijom derivacije funkcije odredi derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt{x}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x}^2 - \sqrt{x}^2}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}^2}{\cancel{\Delta x} (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

Zadatak 45. Koristeći se definicijom derivacije funkcije odredi derivaciju funkcije $f(x) = \sin x$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{x+\Delta x-x}{2} \cos \frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x+\Delta x}{2}}{2\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.
 \end{aligned}$$

Zadatak 46. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^2$ u točki $x_0 = 2$ koristeći se definicijom derivacije funkcije.

Rješenje: $y = 4x - 4$.

Zadatak 47. Koristeći se definicijom derivacije odredite derivacije sljedećih funkcija:

1. $f(x) = x^3$

Rješenje: $f'(x) = 3x^2$

2. $f(x) = \cos x$

Rješenje: $f'(x) = -\sin x$

3. $f(x) = \operatorname{tg} x$

Rješenje: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

5.2 DERIVACIJE ELEMENTARNIH FUNKCIJA I PRAVILA DERIVIRANJA

Koristeći definiciju derivacije funkcije, mogu se izvesti sve derivacije elementarnih funkcija. Mi ćemo navesti dobivene rezultate za one funkcije koje ćemo koristiti:

$$\begin{aligned}
 c' &= 0 \\
 (x^n)' &= nx^{(n-1)} \\
 (\cos x)' &= -\sin x \\
 (\sin x)' &= \cos x \\
 (\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x} \\
 (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
 (a^x)' &= a^x \ln a \\
 (e^x)' &= e^x \\
 (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \\
 (\ln x)' &= \frac{1}{x}.
 \end{aligned}$$

Koristeći definiciju derivacije također izvodimo pravila za derivaciju zbroja, umnoška i kvocijenta funkcija te pravilo za derivaciju složene funkcije. Ovdje ćemo ih sve navesti, a neke od njih i dokazati:

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x) \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

Dokažimo npr. pravilo za derivaciju umnoška:

$$\begin{aligned}& (f \cdot g)'(x) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x + \Delta x) - (f \cdot g)(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) + f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Ako stavimo da je $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$, dobivamo

$$\begin{aligned}(c \cdot g)'(x) &= c' \cdot g(x) + c \cdot g'(x) \\ &= 0 \cdot g(x) + c \cdot g'(x) \\ &= c \cdot g'(x)\end{aligned}$$

Zadatak 48. Koristeći se tabličnim derivacijama elementarnih funkcija i pravilima deriviranja, odredite derivacije sljedećih funkcija:

1. $f(x) = \sin x + x^5$
2. $f(x) = x^3 \operatorname{tg} x$
3. $f(x) = 5 \ln x$
4. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$
5. $f(x) = (2 + x)^2$
6. $f(x) = (2 + x)^{16}$
7. $f(x) = \sin(5x)$

$$8. f(x) = \ln(\ln x + 5)$$

$$9. f(x) = \operatorname{ctg} \frac{1+x}{1-x}.$$

Rješenje:

1. Koristimo pravilo za derivaciju zbroja dviju funkcija:

$$f'(x) = \cos x + 5x^4.$$

2. Koristimo pravilo za derivaciju umnoška dviju funkcija:

$$f'(x) = (x^3)' \operatorname{tg} x + x^3 (\operatorname{tg} x)' = 3x^2 \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{\cos^2 x}.$$

3. Koristimo pravilo za derivaciju umnoška konstante i funkcije:

$$f'(x) = 5(\ln x)' = \frac{5}{x}.$$

4. Koristimo pravilo za derivaciju kvocijenta dviju funkcija:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' x^2 - \sin x (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}.$$

5. Zapišimo funkciju f u obliku:

$$f(x) = 4 + 4x + x^2.$$

Sad koristimo pravilo za derivaciju zbroja:

$$f'(x) = 0 + 4 + 2x = 4 + 2x.$$

6. Sad koristimo pravilo za derivaciju složene funkcije:

$$x \xrightarrow{g} 2+x \xrightarrow{f} (2+x)^{16}.$$

Dakle, $g(x) = 2+x$, a $f(x) = x^{16}$. Sad je

$$f'(x) = 16(2+x)^{15}(2+x)' = 16(2+x)^{15}.$$

7. Sad koristimo pravilo za derivaciju složene funkcije:

$$x \xrightarrow{g} 5x \xrightarrow{f} \sin(5x).$$

Dakle, $g(x) = 5x$, a $f(x) = \sin x$. Sad je

$$f'(x) = \cos(5x)(5x)' = 5\cos(5x).$$

8. Sad koristimo pravilo za derivaciju složene funkcije:

$$x \xrightarrow{g} \ln x + 5 \xrightarrow{f} \ln(\ln x + 5).$$

Dakle, $g(x) = \ln x + 5$, a $f(x) = \ln x$. Sad je

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x + 5} (\ln x + 5)' = \frac{1}{\ln x + 5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(\ln x + 5)}.$$

9. Sad koristimo pravilo za derivaciju složene funkcije i pravilo za derivaciju kvocijenta:

$$x \xrightarrow{g} \frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{f} \operatorname{ctg} \frac{1+x}{1-x}.$$

Dakle, $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$, a $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Sad je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\ &= \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \cdot \frac{1(1-x) - (-1)(1+x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-2}{(1-x)^2 \sin^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}. \end{aligned}$$

Zadatak 49. Koristeći se tablicom derivacija elementarnih funkcija i pravilima deriviranja, odredi derivacije sljedećih funkcija:

1. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Rješenje: $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

2. $f(x) = x^4 \cdot \operatorname{ctg} x$

Rješenje: $f'(x) = \frac{x^3(2 \sin 2x - x)}{\sin^2 x}$

3. $f(x) = (3x + 2)^3$

Rješenje: $f'(x) = 9(3x + 2)^2$

4. $f(x) = \cos(3x + 1)$

Rješenje: $f'(x) = -3 \sin(3x + 1)$

5. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

Rješenje: $f'(x) = \frac{-2}{1-x^2}.$

5.3 L'HOSPITALOVO PRAVILO

Kao što smo već spomenili u prethodnom poglavlju kod računanja limesa može se pojaviti jedan od sedam neodređenih oblika:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0.$$

Limese oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ jednostavnije možemo riješiti pomoću L'Hospitalovog pravila koje ćemo navesti u nastavku. Ostali neodređeni oblici se pomoću odgovarajućih transformacija svode na jedan od ova dva oblika.

L'Hospitalovo pravilo

Neka za funkcije $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \quad \text{ili}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty,$$

pri čemu je $c \in \langle a, b \rangle \subseteq D$. Neka su f i g neprekidne na skupu $[a, b]$ i neprekidno derivabilne na skupu $\langle a, c \rangle \cup \langle c, b \rangle$. Neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle a, c \rangle \cup \langle c, b \rangle$. Ako postoji $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$, pri čemu je $k \in \mathbb{R}$ ili je $k = \infty$ ili je $k = -\infty$, tada je

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Zadatak 50. Izračunajte limese:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

Rješenje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{1} = 5$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+1)}{x}$$

Rješenje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(5x+1))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{5x+1}}{1} = 5$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$$

Rješenje:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 2x - 15)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 2}{1} = 8.$$

5.4 RAST I PAD FUNKCIJE. EKSTREMI

U nastavku ćemo korištenjem prve derivacije dati kriterije za rast i pad te lokalne ekstreme funkcije. Prisjetimo se definicije (strogo) rastuće i (strogo) padajuće funkcije iz poglavlja 3, Elementarne funkcije.

Definicija 20: Kažemo da funkcija f **raste (strogo raste)** na području $S \subseteq D$ ako je

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$

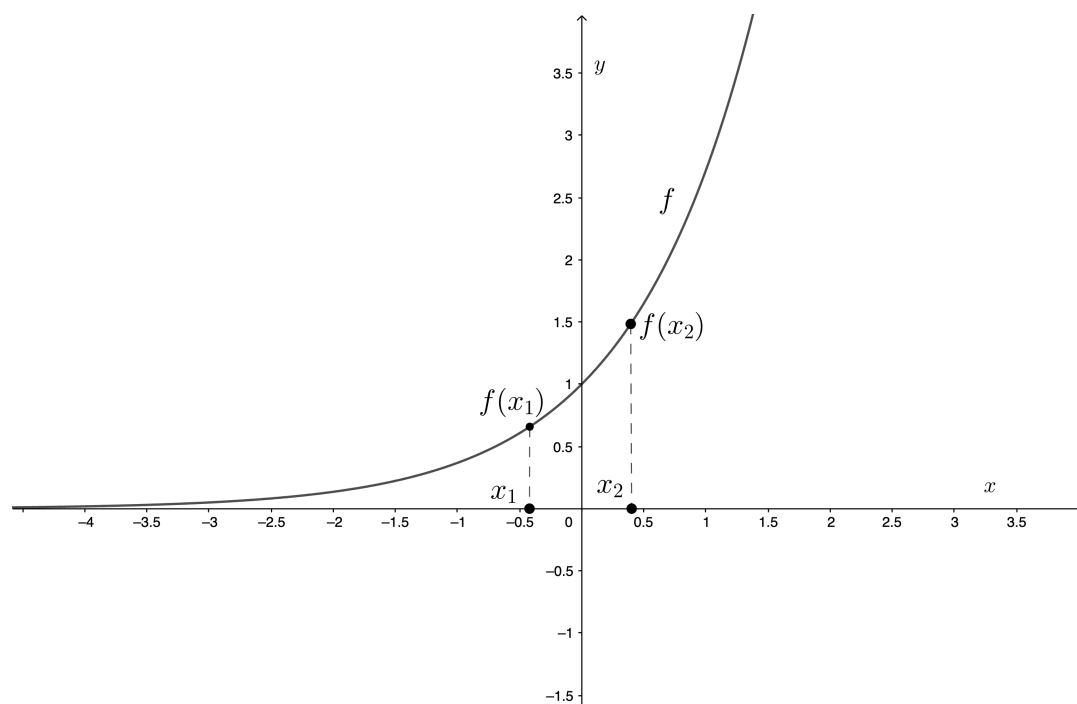
za sve $x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2$.

Kažemo da funkcija f **pada (strogo pada)** na području $S \subseteq D$ ako je

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

za sve $x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2$.

Primjer 12. Jedan primjer svugdje rastuće funkcije je eksponencijalna funkcija s bazom većom od 1.



Slika 5.4.1: Eksponencijalna funkcija

Definicija 21: Neka je $x_0 \in D$. Kažemo da je točka $f(x_0)$ **lokalni minimum funkcije** f ako postoji okolina $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ točke x_0 na kojoj je

$$f(x_0) \leq f(x)$$

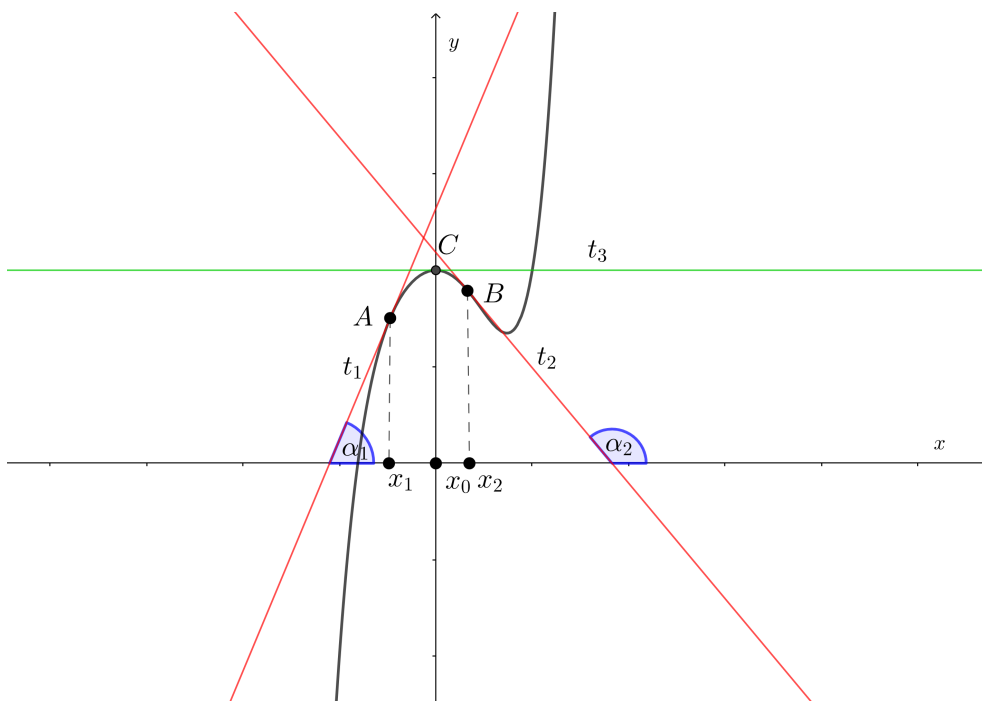
za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$.

Kažemo da je točka $f(x_0)$ **lokalni maksimum funkcije** f ako postoji okolina $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ točke x_0 na kojoj je

$$f(x_0) \geq f(x)$$

za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$.

Na slici 5.4.2 nacrtan je graf neke funkcije te su na njemu postavljene tangente u točkama A , B i C .



Slika 5.4.2: Rast i pad funkcije. Ekstremi.

Vidimo da točka A leži na intervalu na kojem funkcija strogo raste, a B na intervalu na kojem funkcija strogo pada. Također vidimo da je točka $C(x_0, f(x_0))$ lokalni maksimum funkcije jer je $f(x_0) \geq f(x)$, za svaki x iz neke okoline $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ točke x_0 .

Pogledajmo sad tangentu u točki A . Prisjetimo se da nam je derivacija funkcije u točki dala koeficijent smjera tangente u toj točki, tj. $k_1 = f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$. Kako je $0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ$, onda je $f'(x_1) > 0$. Slično je tako $k_2 = f'(x_2) = \operatorname{tg} \alpha_2$. Kako je $90^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$, onda je $f'(x_2) < 0$. Dakle, možemo zaključiti sljedeće:

pretpostavimo da funkcija f ima prvu derivaciju u svakoj točki nekog intervala $\langle a, b \rangle$;

ako je

$$f'(x) \geq 0 \ (f'(x) > 0), \text{ za svaki } x \in \langle a, b \rangle$$

onda funkcija f **raste (strogo raste) na** $\langle a, b \rangle$;

ako je

$$f'(x) \leq 0 \ (f'(x) < 0), \text{ za svaki } x \in \langle a, b \rangle$$

onda funkcija f **pada (strogo pada) na** $\langle a, b \rangle$.

Proučimo sad lokalne ekstreme. Njih tražimo u točkama $x_0 \in D$ za koje postoji okolina na kojoj je funkcija f definirana i u kojima je $f'(x_0) = 0$ ili ne postoji $f'(x_0)$.

Definicija 22: Neka je f neprekidna funkcija u točki x_0 . Točka x_0 je **stacionarna točka** funkcije f ako je $f'(x_0) = 0$. Točka x_0 je **kritična točka** funkcije f ako je x_0 stacionarna točka ili ako f nije derivabilna u točki x_0 .

Dakle, kritične točke su jedine točke u kojima mogu (ali i ne moraju) postojati lokalni ekstremi.

Definicija 23: Neka je f neprekidna u točki x_0 . Ako postoji $\delta > 0$ takav da je $f'(x) \leq 0$, za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle$ i $f'(x) \geq 0$, za svaki $x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle$, onda je $f(x_0)$ **lokalni minimum**. Ako postoji $\delta > 0$ takav da je $f'(x) \geq 0$, za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle$ i $f'(x) \leq 0$, za svaki $x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle$, onda je $f(x_0)$ **lokalni maksimum**.

Jednostavnije govoreći, ako funkcija f do točke $f(x_0)$ pada, a od točke $f(x_0)$ raste, onda je $f(x_0)$ lokalni minimum. Isto tako, ako funkcija f do točke $f(x_0)$ raste, a od točke $f(x_0)$ pada, onda je $f(x_0)$ lokalni maksimum.

U pojedinim zadacima koji slijede prokomentirat ćemo i postojanje asimptota na graf funkcije. Stoga u nastavku dajemo i definiciju asimptota.

Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke grafa funkcije i tog pravca teži u nulu kada točka na grafu teži u beskonačnost. Asimptote mogu biti vertikalne, horizontalne i kose.

Pravac $x = x_0$ nazivamo **vertikalna asimptota** funkcije f ako vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

U prvom slučaju govorimo o vertikalnoj asimptoti s lijeve strane, dok u drugom slučaju govorimo o vertikalnoj asimptoti s desne strane. Vertikalne asimptote mogu se nalaziti u točkama u kojima funkcija nije definirana ili u otvorenim rubovima domene.

Horizontalne asimptote su pravci paralelni s x -osi, dakle imaju koeficijent smjera $k = 0$. Pravac $y = l$ naziva se **desna horizontalna asimptota** funkcije f ako postoji

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Pravac $y = l$ naziva se **lijeva horizontalna asimptota** funkcije f ako postoji

$$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Preostaje nam još razmotriti **kose asimptote**. **Desna kosa asimptota** je pravac $y = kx + l$ za koji vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - l] = 0.$$

Lijeve kosa asimptota je pravac $y = kx + l$ za koji vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx - l] = 0.$$

Koeficijenti k i l za desnu kosu asimptotu jednaki su

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

pri čemu je $k \neq 0, -\infty, +\infty$ i

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx],$$

pri čemu je $l \neq -\infty, +\infty$. Analogno određujemo koeficijente k i l za dobiti lijevu kosu asimptotu tj.

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x},$$

pri čemu je $k \neq 0, -\infty, +\infty$ i

$$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx],$$

pri čemu je $l \neq -\infty, +\infty$.

Zadatak 51. Odredite intervale rasta, intervale pada i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$.

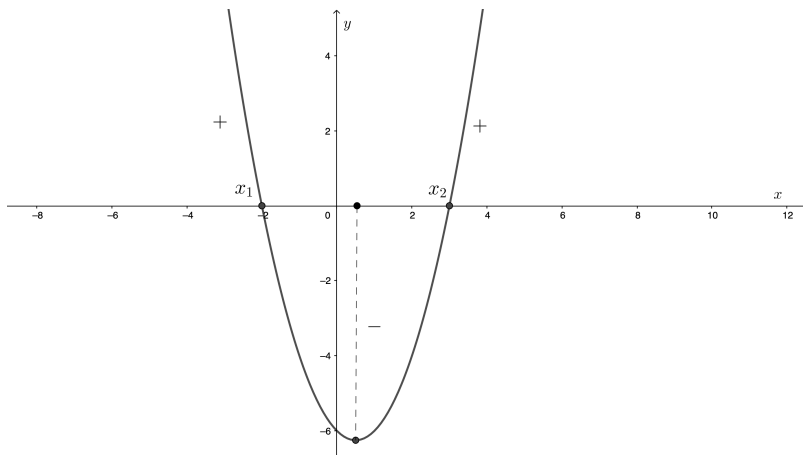
Rješenje: Odredimo derivaciju funkcije f :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x - 6 = x^2 - x - 6.$$

Kako bismo dobili intervale rasta i pada, moramo odrediti predznak derivacije. Mi ćemo to napraviti tako da nacrtamo derivaciju, tj. kvadratnu funkciju $f'(x)$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

$$x_1 = -2, x_2 = 3.$$



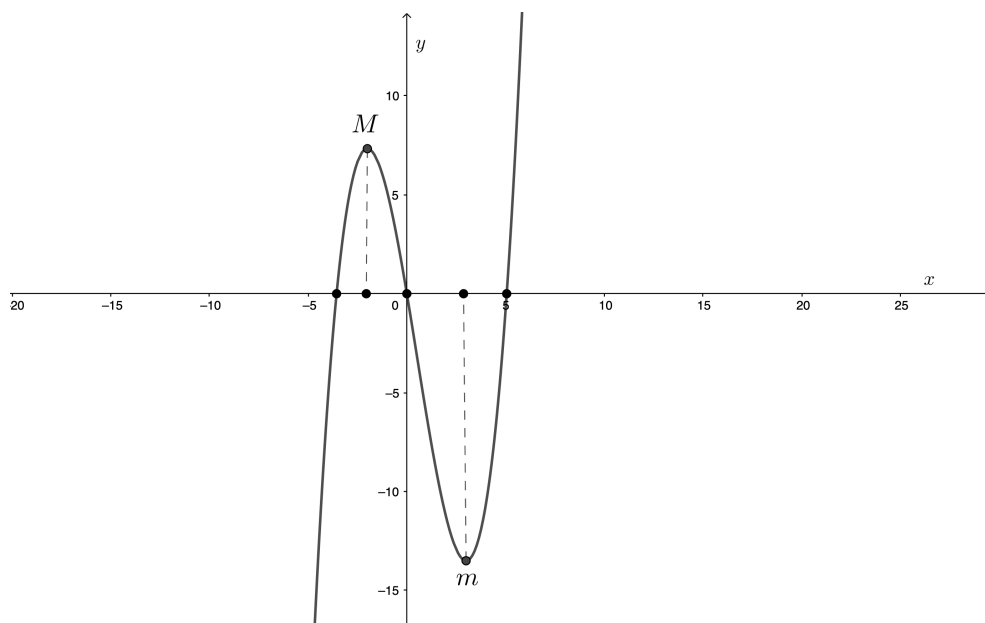
Slika 5.4.3: Graf funkcije $f'(x) = x^2 - x - 6$

Sa slike 5.4.3 vidimo da su vrijednosti kvadratne funkcije pozitivne na intervalu $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$, a negativne na intervalu $\langle -2, 3 \rangle$. To znači da f raste na intervalu $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$, a pada na intervalu

$\langle -2, 3 \rangle$.

Stacionarne točke su $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ jer smo dobili da je u tim točkama derivacija jednaka nuli. Kako je lijevo od točke $x_1 = -2$ $f' > 0$, tj. funkcija raste, a desno je $f' < 0$ pa funkcija pada, onda je u točki $x_1 = -2$ lokalni maksimum tj. lokalni maksimum je $f(-2) = \frac{22}{3}$. Isto tako, lijevo od točke $x_2 = 3$ funkcija pada, a desno raste pa je u toj točki lokalni minimum tj. lokalni minimum je $f(3) = -\frac{27}{2}$. Dakle, $M(-2, \frac{22}{3})$ je točka lokalnog maksimuma, a $m(3, -\frac{27}{2})$ točka lokalnog minimuma na grafu.

Iako se u zadatku to ne traži, ovdje je još dodatno skiciran graf funkcije f te su označeni njeni lokalni ekstremi. Na skiciranom grafu možemo provjeriti dobivene intervale rasta i pada.



Slika 5.4.4: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$

Zadatak 52. Odredite intervale rasta, intervale pada i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{-2x+3}{x^2}$.

Rješenje: Funkcija nije definirana u 0, dakle $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sad odredimo derivaciju funkcije f :

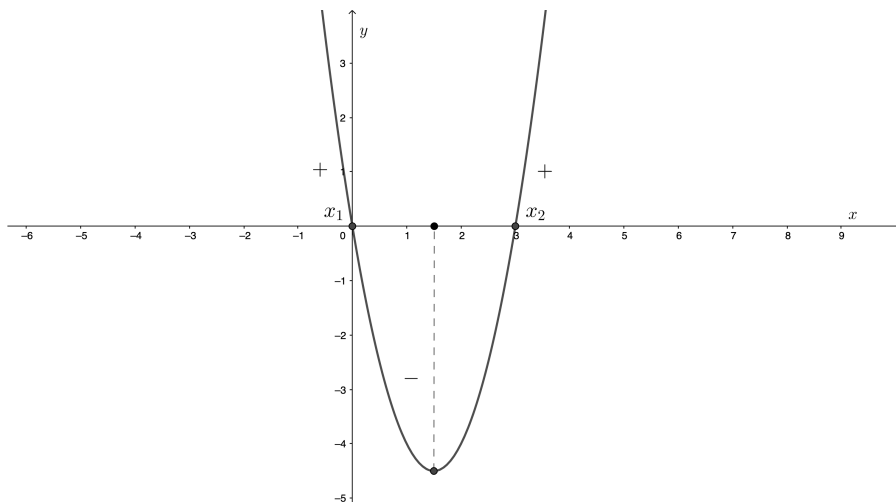
$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x(-2x+3)}{x^4} = \frac{-2x^2 + 4x^2 - 6x}{x^4} = \frac{2x^2 - 6x}{x^4}.$$

Kako bismo dobili intervale rasta i pada, moramo odrediti predznak derivacije. Vidimo da je nazivnik pozitivan za svaki $x \neq 0$ tako da nam predznak derivacije ovisi o brojniku, a to je kvadratna funkcija koju jednostavno možemo nacrtati. Odredimo joj nultočke:

$$2x(x-3) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Primijetimo da $x_1 = 0$ neće biti ekstrem jer $x_1 = 0 \notin D$. Dakle, $x_1 = 0$ je kritična točka funkcije f .



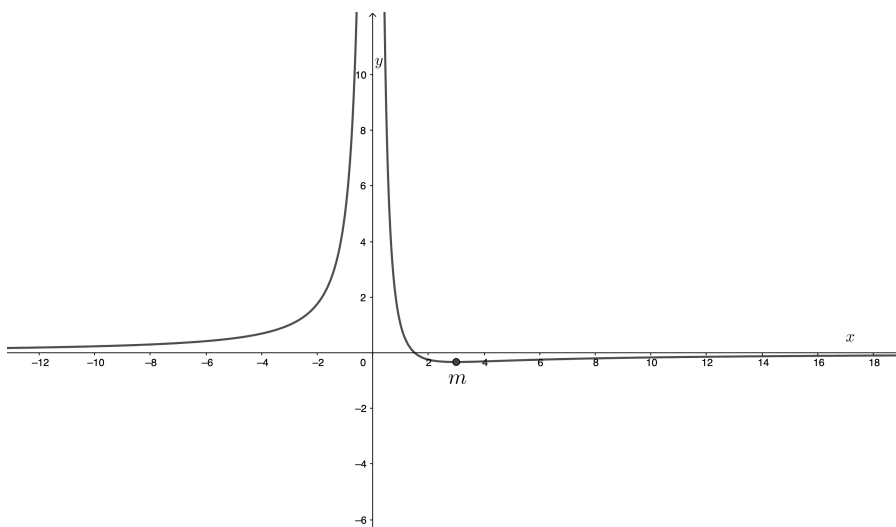
Slika 5.4.5: Graf funkcije $f'(x) = 2x^2 - 6x$

Sa slike 5.4.5 vidimo da su vrijednosti kvadratne funkcije pozitivne na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$, a negativne na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. To znači da f raste na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$, a pada na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$.

Stacionarna točka je $x_2 = 3$. $x_1 = 0$ nije stacionarna točka jer ne pripada domeni D . Kako lijevo od točke $x_2 = 3$ funkcija pada, a desno raste, u toj točki je lokalni minimum i on je jednak $f(3) = -\frac{1}{3}$.

Dakle, $m(3, -\frac{1}{3})$ je točka lokalnog minimuma na grafu.

Iako se u zadatku to ne traži, ovdje je još dodatno skiciran graf funkcije f te je označen njen lokalni minimum. Na skiciranom grafu možemo provjeriti dobivene intervale rasta i pada. Primijetimo da je pravac $x = 0$ lijeva i desna vertikalna asimptota. Također, pravac $y = 0$ je lijeva i desna horizontalna asimptota.



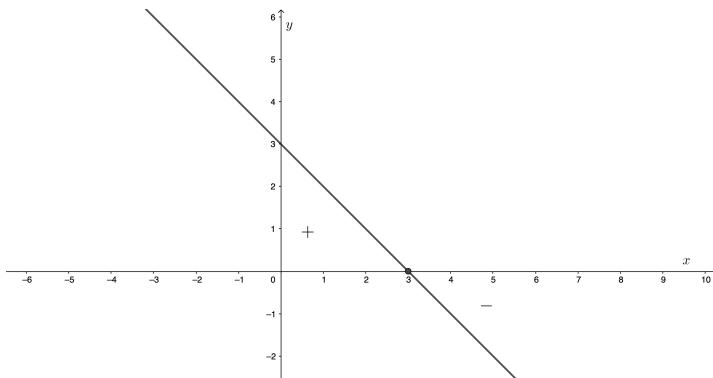
Slika 5.4.6: Graf funkcije $f(x) = \frac{-2x+3}{x^2}$

Zadatak 53. Odredite intervale rasta, intervale pada i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 e^{-x}$.

Rješenje: Odredimo derivaciju funkcije f :

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x}(-1) = x^2 e^{-x}(3 - x).$$

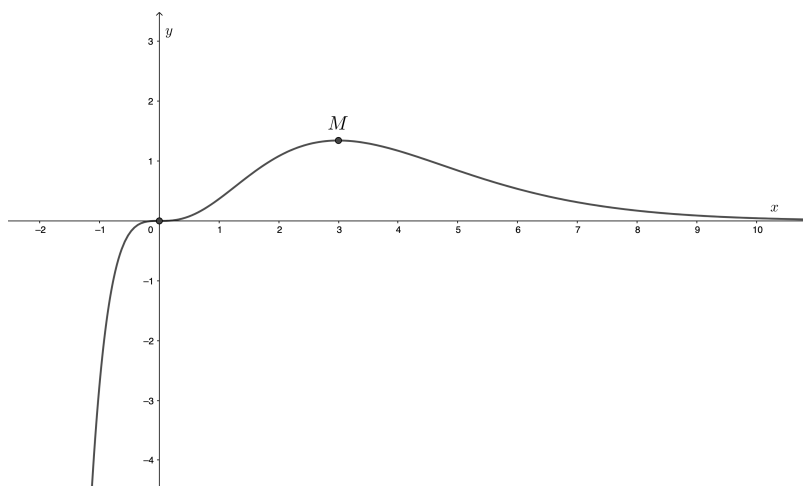
Kako bismo dobili intervale rasta i pada, moramo odrediti predznak derivacije. Kako je $x^2 e^{-x} \geq 0$, predznak derivacije ovisi o linearnoj funkciji $y = 3 - x$ koju jednostavno možemo skicirati.



Slika 5.4.7: Graf funkcije $f'(x) = 3 - x$

Vidimo da je prva derivacija pozitivna na intervalu $\langle -\infty, 3 \rangle$, a negativna na intervalu $\langle 3, \infty \rangle$. To znači da funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, 3 \rangle$, a pada na intervalu $\langle 3, \infty \rangle$. Stoga je $M(3, f(3)) = M(3, 27e^{-3})$ točka lokalnog maksimuma na grafu.

Iako se u zadatku to ne traži, ovdje je još dodatno skiciran graf funkcije f te je označen njen lokalni maksimum. Na skiciranom grafu možemo provjeriti dobivene intervale rasta i pada. Možemo primijetiti da je pravac $y = 0$ desna horizontalna asimptota.



Slika 5.4.8: Graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x}$

Zadatak 54. Odredite intervale rasta, intervale pada i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

Rješenje: Napišimo f u obliku $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$. Sad odredimo derivaciju funkcije f :

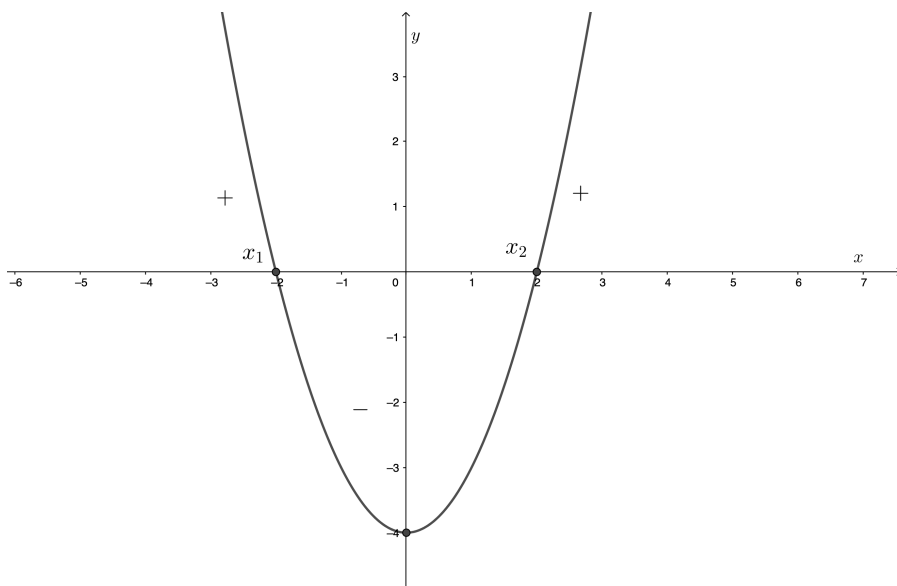
$$f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2 + 4)}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}.$$

Kako bismo dobili intervale rasta i pada, moramo odrediti predznak derivacije. Kako je $x^2 > 0$, za $x \neq 0$, predznak derivacije ovisi o kvadratnoj funkciji $y = x^2 - 4$ koju jednostavno možemo skicirati. Odredimo nultočke kvadratne funkcije:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = 2.$$



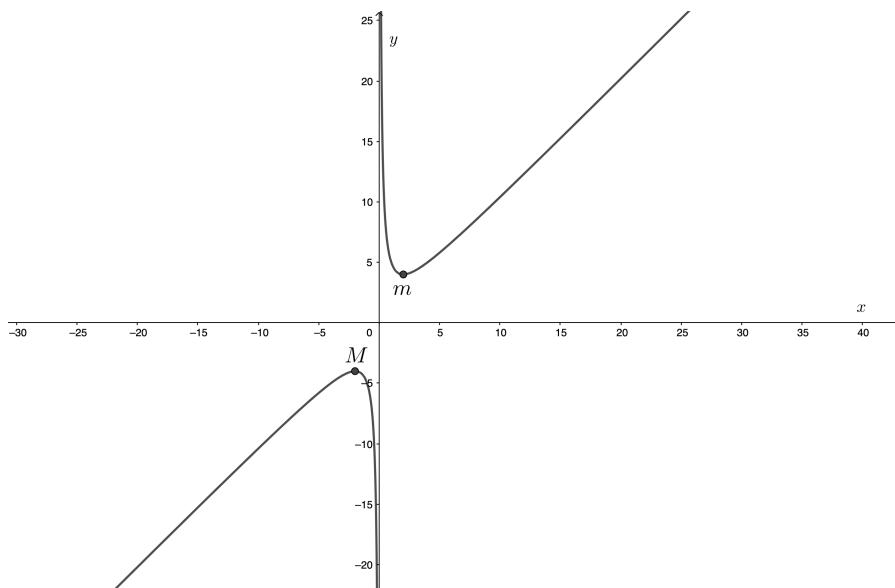
Slika 5.4.9: Graf funkcije $f'(x) = x^2 - 4$

Sa slike 5.4.9 vidimo da su vrijednosti kvadratne funkcije pozitivne na intervalu $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$, a negativne na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$. To znači da f raste na intervalu $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$, a pada na intervalu $\langle -2, 2 \rangle \setminus \{0\}$.

Stacionarne točke su $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$. Kako lijevo od točke $x_1 = -2$ funkcija raste, a desno pada, onda je u točki $x_1 = -2$ lokalni maksimum i on iznosi $f(-2) = -4$. Slično je u točki $x_2 = 2$ lokalni minimum i on iznosi $f(2) = 4$. Dakle, $M(-2, -4)$ je točka lokalnog maksimuma, a $m(2, 4)$ točka lokalnog minimuma na grafu.

Iako se u zadatku to ne traži, ovdje je još dodatno skiciran graf funkcije f te su označeni njen lokalni minimum i maksimum. Na skiciranom

grafu možemo provjeriti dobivene intervale rasta i pada. Također vidimo da je pravac $x = 0$ lijeva i desna vertikalna asimptota.



Slika 5.4.10: Graf funkcije $f(x) = x + \frac{4}{x}$

Zadatak 55. *Odredite intervale rasta, intervale pada i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x \ln x$.*

Rješenje: Odredimo derivaciju funkcije f :

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

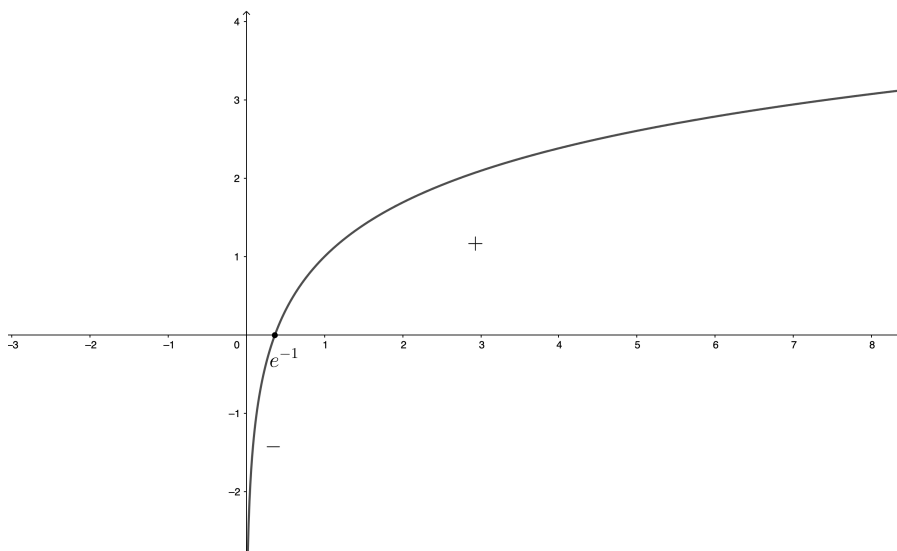
Kako bismo dobili intervale rasta i pada, moramo odrediti predznak derivacije. Odredimo najprije stacionarnu točku:

$$\ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

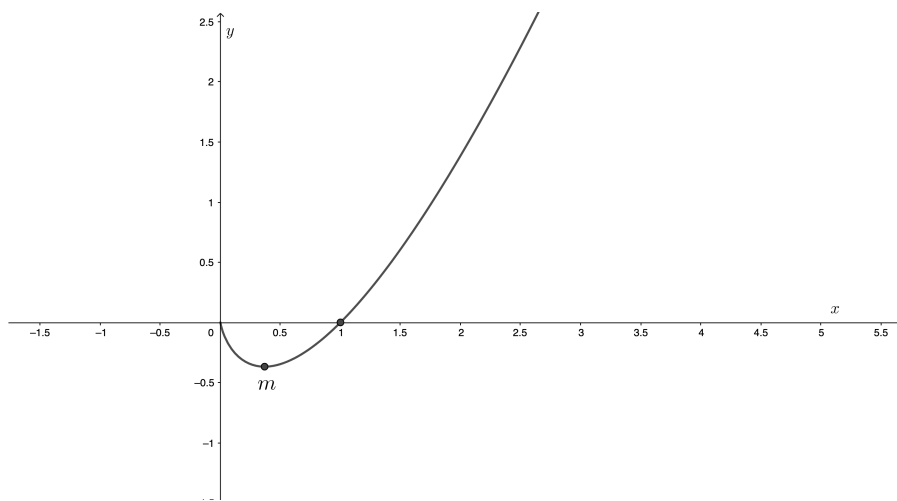
$$x = e^{-1}.$$

Sad nacrtajmo funkciju $\ln x + 1$:

Slika 5.4.11: Graf funkcije $f'(x) = \ln x + 1$

Vidimo da je derivacija negativna na intervalu $\langle 0, e^{-1} \rangle$, a pozitivna na intervalu $\langle e^{-1}, \infty \rangle$. To znači da funkcija pada na intervalu $\langle 0, e^{-1} \rangle$, a raste na intervalu $\langle e^{-1}, \infty \rangle$ te je $m(e^{-1}, f(e^{-1})) = m(e^{-1}, -e^{-1})$ točka lokalnog minimuma na grafu.

Još je dodatno skiciran graf funkcije f te je označena točka $m(e^{-1}, -e^{-1})$.

Slika 5.4.12: Graf funkcije $f(x) = x \ln x$

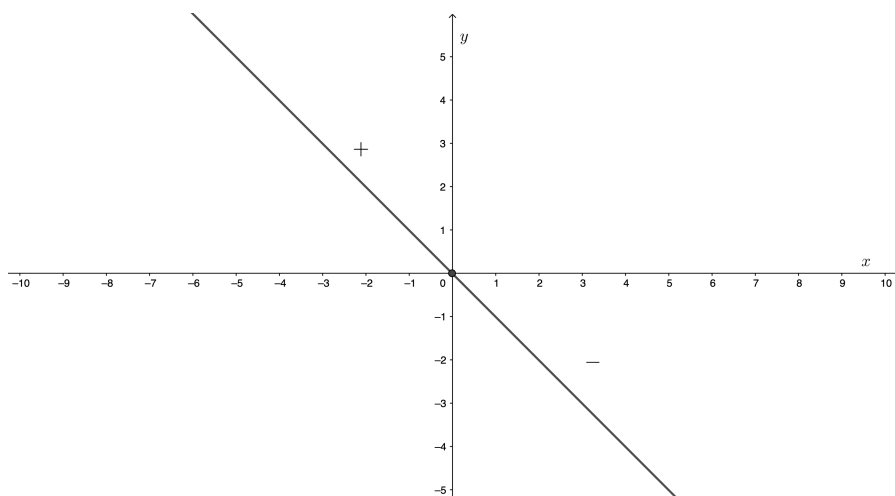
Zadatak 56. *Odredite intervale rasta, intervale pada i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.*

Rješenje: Odredimo derivaciju funkcije f :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{-x}{1+x^2}.$$

Kako bismo dobili intervale rasta i pada, moramo odrediti predznak derivacije. Kako je nazivnik pozitivan, predznak ovisi o brojniku, a to

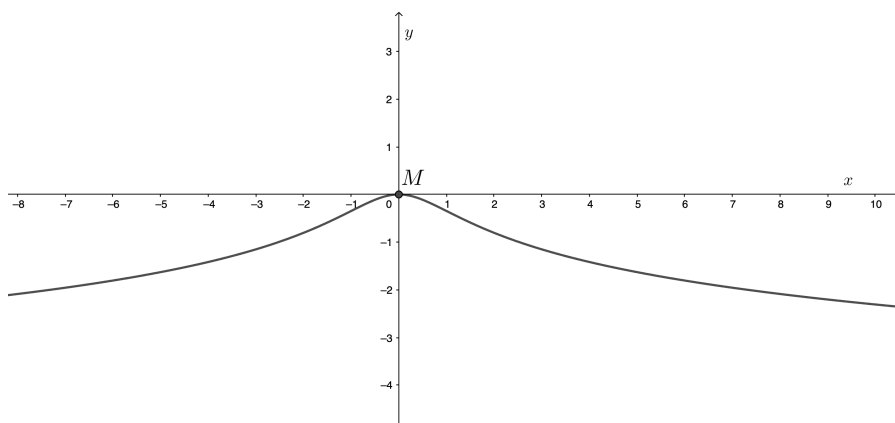
je linearna funkcija. Stacionarna točka je $x = 0$. Skicirajmo funkciju $y = -x$:



Slika 5.4.13: Graf funkcije $f'(x) = -x$

Iz predznaka derivacije vidimo da funkcija f raste na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$, a pada na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Stoga je $M(0, f(0)) = M(0, 0)$ točka lokalnog maksimuma na grafu.

Ovdje je još za provjeru skiciran graf funkcije f i na njemu označena točka $M(0, 0)$.



Slika 5.4.14: Graf funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

Zadatak 57. Odredite intervale rasta, intervale pada i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 3}$.

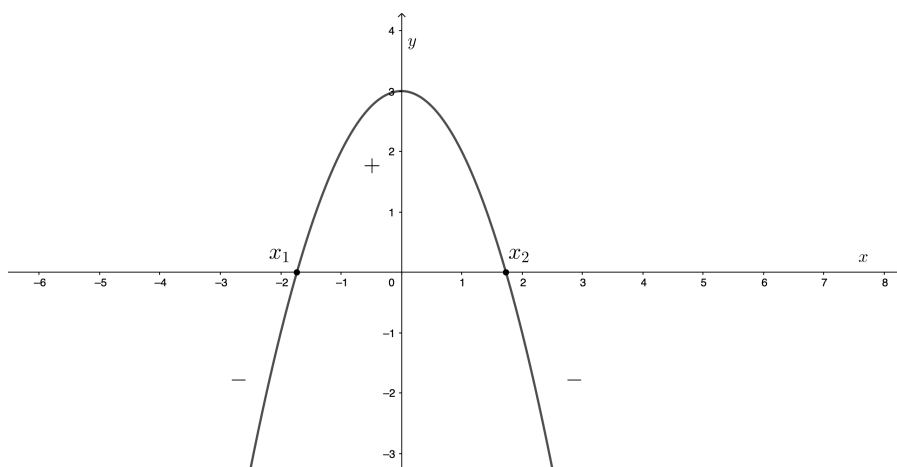
Rješenje: Odredimo derivaciju funkcije f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2 - 2x + 3) - x(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 3 - 2x^2 + 2x}{(x^2 - 2x + 3)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 3}{(x^2 - 2x + 3)^2}. \end{aligned}$$

Kako je nazivnik pozitivan, predznak derivacije ovisi o kvadratnoj funkciji u brojniku. Odredimo joj nultočke i skicirajmo je. Dobivamo

$$-x^2 + 3 = 0$$

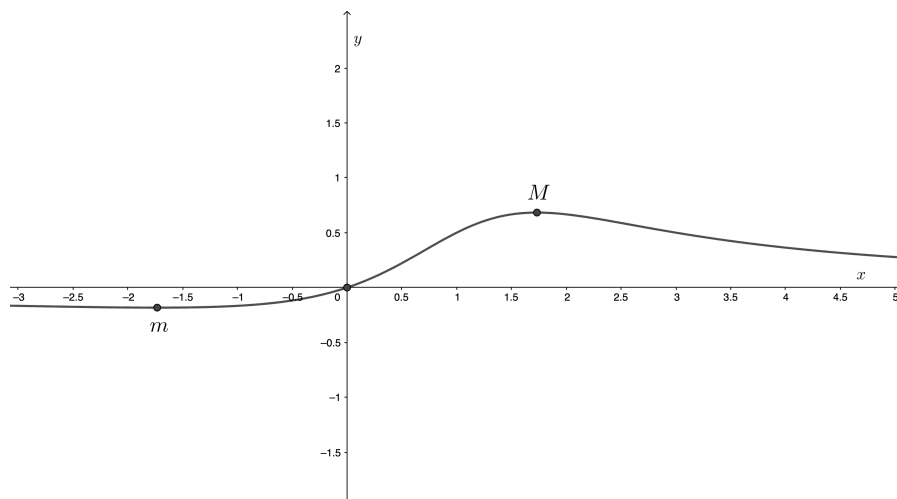
$$x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}.$$



Slika 5.4.15: Graf funkcije $f'(x) = -x^2 + 3$

Iz predznaka derivacije vidimo da funkcija pada na intervalu $\langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3}, \infty \rangle$, a raste na intervalu $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$. Stoga je $m(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4})$ točka lokalnog minimuma, a $M(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$ točka lokalnog maksimuma na grafu.

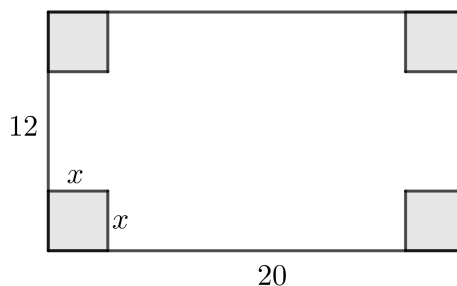
Ovdje je također još dodatno skiciran graf funkcije f na kojem možemo vidjeti eksteme funkcije te lijevu i desnu horizontalnu asimptotu $y = 0$.

Slika 5.4.16: Graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 3}$

Zadatak 58. Od pravokutnog kartona duljina stranica 12 i 20 napravite kutiju bez poklopca maksimalnog volumena.

Rješenje:

Nacrtajmo pravokutnik te s x označimo stranice kvadrata koje ćemo rezati po jednoj unutarnjoj stranici i savijati za zalijepiti kutiju.



Slika 5.4.17: Rješenje zadatka 58

Volumen kutije iznosi

$$\begin{aligned} V(x) &= (12 - 2x)(20 - 2x)x = (240 - 24x - 40x + 4x^2)x \\ &= 4x^3 - 64x^2 + 240x. \end{aligned}$$

Odredimo x tako da volumen bude maksimalan tj. nađimo maksimum funkcije V . Nađimo derivaciju funkcije V :

$$V'(x) = 12x^2 - 128x + 240.$$

Iz $V'(x) = 0$ dobivamo $x_{1,2} = \frac{16 \pm 2\sqrt{19}}{3}$ pa su $x_1 = \frac{16 - 2\sqrt{19}}{3}$ i $x_2 = \frac{16 + 2\sqrt{19}}{3}$ stacionarne točke. Domena funkcije V je $\langle 0, 6 \rangle$. Kako je V' kvadratna funkcija, slijedi da je $\langle 0, \frac{16 - 2\sqrt{19}}{3} \rangle$ interval rasta, a $\langle \frac{16 - 2\sqrt{19}}{3}, 6 \rangle$

interval pada. Stoga je u točki $x_1 = \frac{16-2\sqrt{19}}{3}$ lokalni maksimum i on iznosi

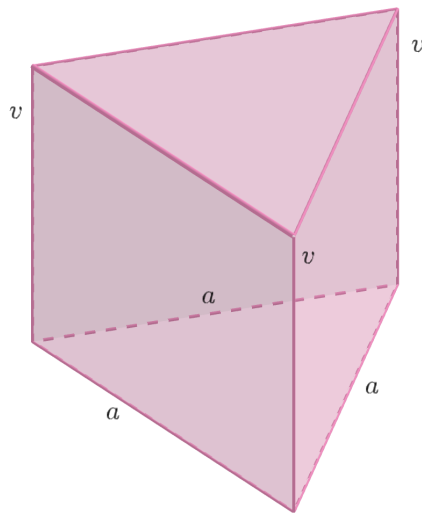
$$V\left(\frac{16-2\sqrt{19}}{3}\right) \approx 262.68.$$

Točka $x_2 = \frac{16+2\sqrt{19}}{3}$ ne pripada domeni funkcije V .

Zadatak 59. Baza uspravne prizme je jednakostraničan trokut. Oplošje prizme iznosi 600. Odredite dimenzije prizme tako da volumen bude maksimalan.

Rješenje:

Označimo osnovni brid prizme s a , a visinu s v .



Slika 5.4.18: Rješenje zadatka 59

Volumen prizme iznosi

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v,$$

a oplošje

$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3av \\ 600 &= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3av \end{aligned}$$

iz čega dobivamo

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3av &= 600 - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow v &= \frac{200}{a} - \frac{a\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Uvrstimo v u volumen i dobivamo

$$V(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{200}{a} - \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) = 50\sqrt{3}a - \frac{1}{8}a^3.$$

Za pronaći maksimum funkcije V najprije ju moramo derivirati pa imamo

$$V'(a) = 50\sqrt{3} - \frac{3}{8}a^2.$$

Stacionarna točke su $a_1 = -\frac{20\sqrt[4]{27}}{3}$ i $a_2 = \frac{20\sqrt[4]{27}}{3}$. Iz $a > 0$ i $v > 0$ dobivamo da je domena funkcije V interval $\langle 0, 20\sqrt[4]{3} \rangle$. Na toj domeni je $\langle 0, \frac{20\sqrt[4]{27}}{3} \rangle$ interval rasta, a $\langle \frac{20\sqrt[4]{27}}{3}, 20\sqrt[4]{3} \rangle$ interval pada, pa se u točki $a_2 = \frac{20\sqrt[4]{27}}{3}$ postiže maksimum. Maksimum funkcije V jednak je $V\left(\frac{20\sqrt[4]{27}}{3}\right) = \frac{2000\sqrt[4]{3}}{3}$. Točka $a_1 = -\frac{20\sqrt[4]{27}}{3}$ ne pripada domeni funkcije V .

5.5 ZADATCI ZA VJEŽBU

Zadatak 60. Izračunajte limese:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+2x}$

Rješenje:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{-2-2}{-2} = 2$$

2. $\lim_{x \rightarrow -9} \frac{x+9}{5-\sqrt{16-x}}$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -9} \frac{x+9}{5-\sqrt{16-x}} &= \lim_{x \rightarrow -9} \frac{x+9}{5-\sqrt{16-x}} \cdot \frac{5+\sqrt{16-x}}{5+\sqrt{16-x}} = \\ \lim_{x \rightarrow -9} \frac{(x+9)(5+\sqrt{16-x})}{5^2 - \sqrt{16-x}^2} &= \lim_{x \rightarrow -9} \frac{(x+9)(5+\sqrt{16-x})}{9+x} = \\ &= 5 + \sqrt{16+9} = 10 \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x^2}{x^2}$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x^2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x^2}{\cos 2x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos 2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x^2}{2x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x^2} = 2 \end{aligned}$$

4. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(x+t) - \cos x}{t}$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(x+t) - \cos x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+t+x}{2} \sin \frac{x+t-x}{2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x+t}{2} \sin \frac{t}{2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \cdot \sin \frac{2x+t}{2} = -\sin x. \end{aligned}$$

Zadatak 61. Po definiciji izračunajte derivacije funkcija:

1. $f(x) = \operatorname{ctg} x$

Rješenje:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg}(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x+\Delta x) \sin x - \cos x \sin(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x) \sin x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - x - \Delta x)}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

2. $f(x) = 2x^3$

Rješenje:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^3 - 2x^3}{\Delta x} \\ &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2]}{\cancel{\Delta x}} \\ &= 6x^2 \end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{\sqrt{x + \Delta x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}}{\Delta x} \\
 &= 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \Delta x}}{\Delta x \sqrt{x + \Delta x} \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}} \\
 &= 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sqrt{x}}^2 - \cancel{\sqrt{x + \Delta x}}^2}{\Delta x \sqrt{x + \Delta x} \sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})} \\
 &= 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \sqrt{x + \Delta x} \sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})} \\
 &= \frac{-3}{\sqrt{x} \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}} = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

Zadatak 62. Izračunajte derivacije funkcija:

1. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{2+x^2}{2-x^2}$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 \frac{2+x^2}{2-x^2}} \cdot \left(\frac{2+x^2}{2-x^2} \right)' \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \frac{2+x^2}{2-x^2}} \frac{2x(2-x^2) - (2+x^2)(-2x)}{(2-x^2)^2} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \frac{2+x^2}{2-x^2}} \frac{4x - 2x^3 + 4x + 2x^3}{(2-x^2)^2} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \frac{2+x^2}{2-x^2}} \frac{8x}{(2-x^2)^2}
 \end{aligned}$$

2. $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(xe^{-x})'(x^2+1) - (xe^{-x})(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{(e^{-x} - xe^{-x})(x^2+1) - xe^{-x}2x}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{e^{-x}[(1-x)(x^2+1) - 2x^2]}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{e^{-x}(x^2+1 - x^3 - x - 2x^2)}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{e^{-x}(-x^3 - x^2 - x + 1)}{(x^2+1)^2}.
 \end{aligned}$$

Zadatak 63. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x + 2$ u točki $T(2, y_0)$.

Rješenje:

$$y_0 = f(2) = 2^3 - 6 + 2 = 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$k = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$$

$$t \cdots y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$t \cdots y - 4 = 9(x - 2)$$

$$t \cdots y = 9x - 14.$$

INTEGRALI

6.1 NEODREĐENI INTEGRAL

U ovom poglavlju proučavamo sljedeći problem: ako je zadana funkcija f , trebamo naći funkciju čija je derivacija jednaka f . Takvu funkciju F za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x), \text{ za svaki } x \in \langle a, b \rangle$$

zovemo **primitivna funkcija funkcije f na intervalu $\langle a, b \rangle$**

Neka je F primitivna funkcija funkcije f na intervalu $\langle a, b \rangle$ i $c \in \mathbb{R}$. Tada je

$$[F(x) + c]' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x), \text{ za svaki } x \in \langle a, b \rangle$$

pa slijedi da je i $F + c$ primitivna funkcija funkcije f na intervalu $\langle a, b \rangle$, tj. primitivna funkcija je skup koji se sastoji od beskonačno mnogo funkcija koje se razlikuju za konstantu. Skup

$$\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

zovemo **neodređeni integral funkcije f** i pišemo

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Funkciju f nazivamo **podintegralna funkcija**.

Primjer 13. *Primitivna funkcija funkcije $f(x) = x$ je funkcija $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ jer je*

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x + c' = x = f(x).$$

Svojstva neodređenog integrala:

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Integrali elementarnih funkcija:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, x \neq 0$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x dx} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x dx} = -\operatorname{ctg} x + c.$$

Zadatak 64. Izračunajte neodređene integrale:

1. $\int 5(x^4 - 3x^2 - 1) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int 5(x^4 - 3x^2 - 1) dx &= 5 \int x^4 dx - 15 \int x^2 dx - 5 \int dx \\ &= 5 \frac{x^{4+1}}{4+1} - 15 \frac{x^{2+1}}{2+1} - 5 \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = 5 \frac{x^5}{5} - 15 \frac{x^3}{3} - 5x + c \\ &= x^5 - 5x^3 - 5x + c \end{aligned}$$

2. $\int (\frac{2}{3}x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int (\frac{2}{3}x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}) dx &= \frac{2}{3} \int x^3 dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} \int dx \\ &= \frac{2}{3} \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x + c = \frac{x^4}{6} + 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x + c \end{aligned}$$

3. $\int \frac{5(x-1)}{\sqrt{x}} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{5(x-1)}{\sqrt{x}} dx &= 5 \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 5 \int x^{1-\frac{1}{2}} dx - 5 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 5 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 5 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 5 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$

$$4. \int \left(\frac{2}{x^4} + \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} \right) dx$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2}{x^4} + \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} \right) dx &= 2 \int x^{-4} dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2 \ln|x| + c = -\frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2 \ln|x| + c \end{aligned}$$

6.2 METODA SUPSTITUCIJE

Neka je zadan integral

$$\int f(x) dx.$$

Pretpostavimo da $f(x)$ možemo zapisati u obliku

$$f(x) = v(u(x)) u'(x)$$

te pretpostavimo da možemo pronaći primitivnu funkciju V od v , tj. $V' = v$. Po pravilu za derivaciju složene funkcije imamo

$$[V(u(x))]' = V'(u(x)) u'(x) = v(u(x)) u'(x) = f(x),$$

tj. složena funkcija $V \circ u$ je primitivna funkcija funkcije f . Slijedi da je

$$\int f(x) dx = (V \circ u)(x) + c = V(u(x)) + c.$$

Na ovoj jednakosti zasniva se metoda supstitucije.

Primjer 14. Izračunajte neodređeni integral:

$$\int \frac{4x^2}{x^3 + 5} dx.$$

Rješenje:

Odaberimo $u(x) = x^3 + 5$ i $v(x) = \frac{4}{3x}$. Derivacija funkcije $u(x)$ je $u'(x) = 3x^2$. Primitivna funkcija funkcije $v(x) = \frac{4}{3x}$ je $V(x) = \frac{4}{3} \ln|x|$. Tada je

$$\frac{4x^2}{x^3 + 5} = \frac{4}{3(x^3 + 5)} (x^3 + 5)' = v(u(x)) u'(x).$$

Sad je

$$\int \frac{4x^2}{x^3 + 5} dx = \frac{4}{3} \ln|x^3 + 5| + c.$$

Ovaj postupak ćemo jednostavnije zapisivati na sljedeći način

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2}{x^3 + 5} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = x^3 + 5 \\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \\ du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right\} \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{4}{3} \ln|u| + c = \frac{4}{3} \ln|x^3 + 5| + c. \end{aligned}$$

Zadatak 65. Izračunajte neodređene integrale:

1. $\int \sqrt{4x-5} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4x-5} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = 4x-5 \\ du = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4} du \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{4} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6} \sqrt{(4x-5)^3} + c \end{aligned}$$

2. $\int (-2x+3)^7 dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int (-2x+3)^7 dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = -2x+3 \\ du = -2dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} du \end{array} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int u^7 du = -\frac{1}{2} \frac{u^8}{8} + c = -\frac{1}{16} (-2x+3)^8 + c \end{aligned}$$

3. $\int x^4 \sqrt{2x^5-1} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int x^4 \sqrt{2x^5-1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = 2x^5-1 \\ du = 10x^4 dx \Rightarrow x^4 dx = \frac{1}{10} du \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{10} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{10} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{15} \sqrt{(2x^5-1)^3} + c \end{aligned}$$

4. $\int \frac{2x^2}{3x^3+1} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2}{3x^3+1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = 3x^3+1 \\ du = 9x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{9} du \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{9} \int \frac{du}{u} = \frac{2}{9} \ln |u| + c = \frac{2}{9} \ln |3x^3+1| + c \end{aligned}$$

5. $\int \sin(-4x+1) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \sin(-4x+1) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = -4x+1 \\ du = -4dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{4} du \end{array} \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \int \sin u du = \frac{1}{4} \cos u + c = \frac{1}{4} \cos(-4x+1) + c \end{aligned}$$

6. $\int \sin^2 x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = 2x \\ du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2} x + c - \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin u + c \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \end{aligned}$$

7. $\int \operatorname{tg} x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \cos x \\ du = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -du \end{array} \right\} \\ &= - \int \frac{1}{u} du = -\ln |u| + c = -\ln |\cos x| + c. \end{aligned}$$

6.3 ODREĐENI INTEGRAL

Definicija 24: Za realnu funkciju f kažemo da je **omeđena** ako postoje realni brojevi m i M za koje vrijedi $m \leq f(x) \leq M$ za svaki x na području definicije.

Definicija 25: Konačan skup točaka $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sa svojstvom da je

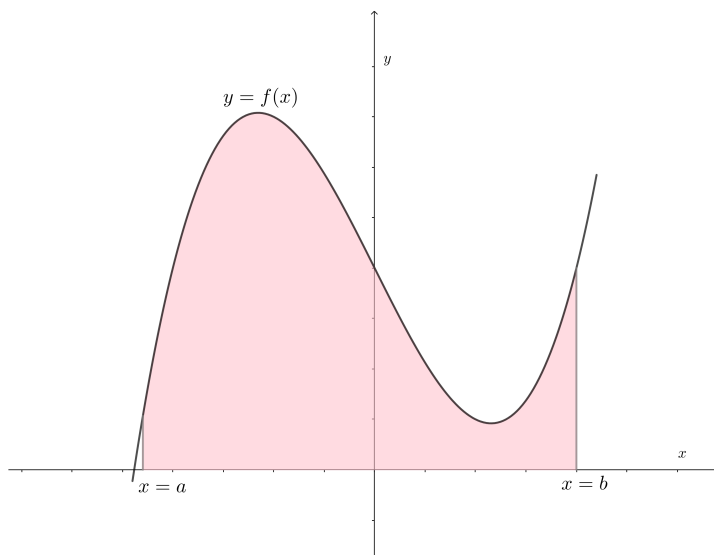
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

nazivamo **razdioba** ili **particija** segmenta $[a, b]$. Za particiju D' kažemo da je **profinjenje particije** D ako je $D' \subseteq D$.

Definicija 26: Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $M \in \mathbb{R}$ **supremum** skupa A , oznaka $\sup A$ ako je M **gornja međa** skupa A tj. $a \leq M$ za svaki $a \in A$ i M je najmanja gornja međa.

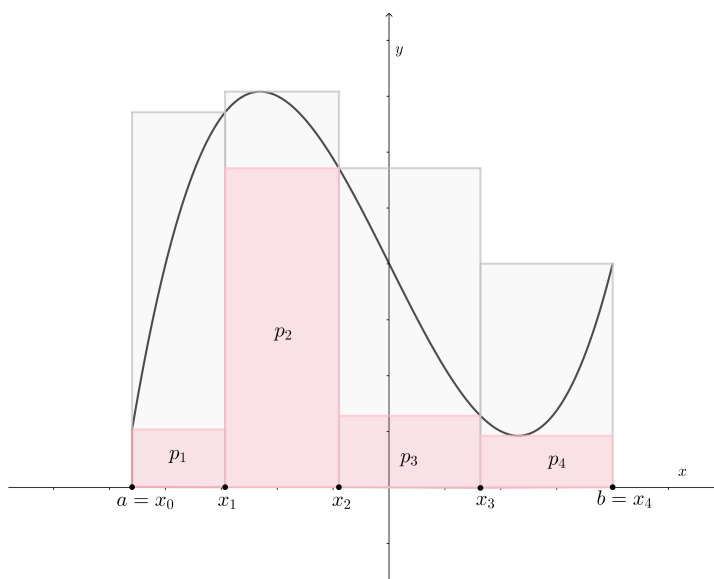
Kažemo da je $m \in \mathbb{R}$ **infimum** skupa A , oznaka $\inf A$ ako je m **donja međa** skupa A tj. $a \geq m$ za svaki $a \in A$ i m je najveća donja međa.

Uzmimo omeđenu funkciju $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Željeli bismo izračunati površinu P omeđenu grafom funkcije f , pravcima $x = a$, $x = b$ i osi x .

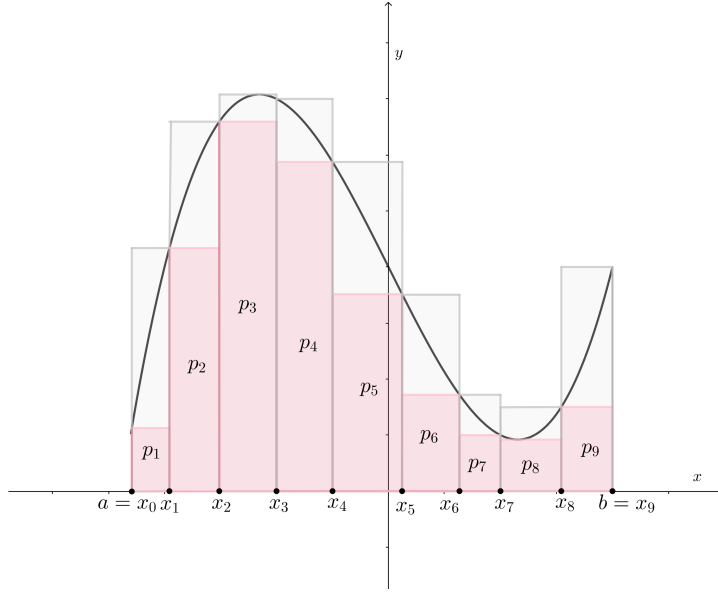


Slika 6.3.1: Površina omeđena grafom funkcije f , pravcima $x = a$, $x = b$ i osi x

Kako je funkcija f zakrivljena, mi ovu površinu ne možemo prekriti pravokutnicima, ali u nju možemo upisivati pravokutnike ili ju prekriti opisanim pravokutnicima. Zbroj površina upisanih pravokutnika nazivamo **donja integralna suma**, a zbroj površina opisanih pravokutnika nazivamo **gornja integralna suma**. Na sljedećim slikama vidimo da je tražena površina između zbroja upisanih i zbroja opisanih pravokutnika. Također, možemo uočiti da se uzimajući sve sitniju particiju segmenta $[a, b]$, zbroj površina upisanih pravokutnika povećava ili ostaje isti, a zbroj površina opisanih pravokutnika smanjuje ili ostaje isti i sve se više približavaju traženoj površini.



Slika 6.3.2: Donja i gornja integralna suma



Slika 6.3.3: Donja i gornja integralna suma

Za definirati određeni integral uzmimo najprije neku particiju D segmenta $[a, b]$ tj. konačan skup točaka $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sa svojstvom da je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Kako je funkcija f omeđena, na svakom podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ postoje nenegativni brojevi m_i , M_i takvi da je

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ako s P označimo površinu ispod grafa funkcije, vrijedi

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq P \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}). \quad (11)$$

Što je n veći, donja ograda aproksimacije (11) će rasti, a gornja padati. Definirajmo

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Brojeve $s(f, P)$ i $S(f, P)$ nazivamo **donja**, odnosno **gornja Darbouxova suma**.

Definicija 27: Donji Riemannov integral funkcije f na $[a, b]$ definira se kao

$$\int_- f = \sup \{s(f, P) : P \text{ particija od } [a, b]\}.$$

Gornji Riemannov integral funkcije f na $[a, b]$ definira se kao

$$\int^- f = \inf \{S(f, P) : P \text{ particija od } [a, b]\}.$$

Definicija 28: Za omeđenu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je $\mathbb{R}$ -integrabilna ako je $\int_- f = \int^- f$. Taj broj tada nazivamo **Riemanov integral** ili **određeni integral** funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označavamo

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Brojeve a i b zovemo **donja**, odnosno **gornja granica integracije**.

Svojstva određenog integrala:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0,$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, c$ je konstanta,
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in \langle a, b \rangle,$
6. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ako je $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b].$

Za računanje određenog integrala koristit ćemo sljedeći teorem bez dokaza:

Teorem 4. (Newton-Leibnitzova formula)

Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ i F primitivna funkcija od f . Tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Dakle, možemo reći da određeni integral računamo kao razliku vrijednosti primitivne funkcije u gornjoj i donjoj granici promatranog integrala.

Zadatak 66. Izračunajte određene integrale:

$$1. \int_1^3 \frac{x^2}{3} dx$$

Rješenje:

$$\int_1^3 \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{1}{9} (3^3 - 1^3) = \frac{26}{9}$$

2. $\int_0^2 \frac{3x^2-2x}{\sqrt{x}} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{3x^2-2x}{\sqrt{x}} dx &= 3 \int_0^2 x^{2-\frac{1}{2}} dx - 2 \int_0^2 x^{1-\frac{1}{2}} dx \\ &= 3 \int_0^2 x^{\frac{3}{2}} dx - 2 \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = 3 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^2 - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \\ &= \frac{6}{5} (2^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}) - \frac{4}{3} (2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}) = \frac{6}{5} \sqrt{2^5} - \frac{4}{3} \sqrt{2^3} \\ &= \frac{6}{5} \cdot 4\sqrt{2} - \frac{4}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{24}{5} \sqrt{2} - \frac{8}{3} \sqrt{2} \\ &= \frac{72\sqrt{2} - 40\sqrt{2}}{15} = \frac{32\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = 2x + \frac{\pi}{3} \\ du = 2dx \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos u du = \frac{1}{2} \sin u \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \frac{1}{2} \left(\sin \pi - \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

4. $\int_0^2 \frac{5}{2x+3} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{5}{2x+3} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = 2x + 3 \\ du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right\} \\ &= \frac{5}{2} \int_3^7 \frac{1}{u} du = \frac{5}{2} \ln|u| \Big|_3^7 = \frac{5}{2} (\ln 7 - \ln 3) \end{aligned}$$

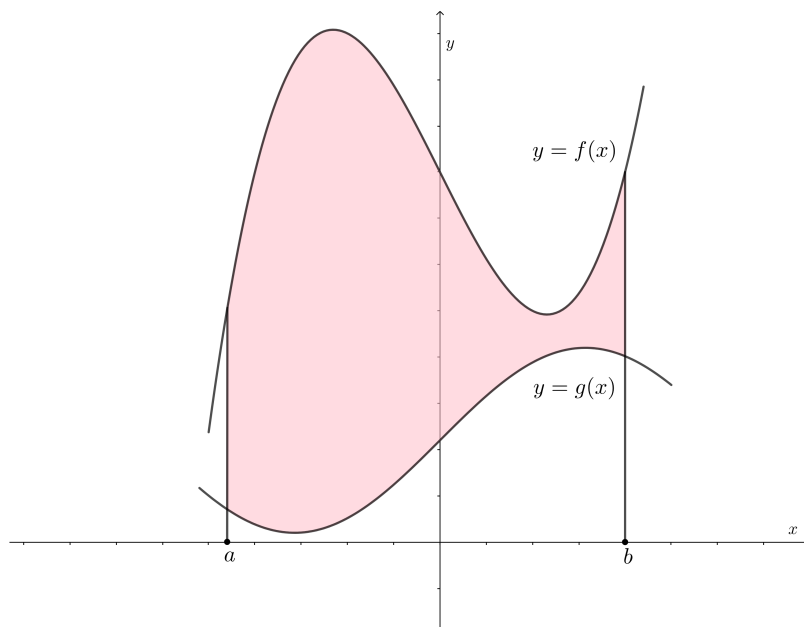
5. $\int_1^3 \sqrt{3x+1} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{3x+1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u(x) = 3x + 1 \\ du = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \int_4^{10} \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_4^{10} = \frac{2}{9} (\sqrt{10^3} - \sqrt{4^3}) \\ &= \frac{2}{9} (10\sqrt{10} - 8) = \frac{4}{9} (5\sqrt{10} - 4). \end{aligned}$$

6.4 POVRŠINE RAVNINSKIH LIKOVA

Promatramo funkcije $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i njihove grafove. Željeli bismo izračunati površinu ravninskog lika omeđenog grafovima funkcija f i g te pravcima $x = a$ i $x = b$ kao što je prikazano na slici 6.4.1.



Slika 6.4.1: Površina ravninskog lika

Kako računanjem $\int_a^b f(x)dx$ dobivamo površinu ispod grafa funkcije f na segmentu $[a, b]$, a računanjem $\int_a^b g(x)dx$ površinu ispod grafa funkcije g na segmentu $[a, b]$, onda je tražena površina jednaka

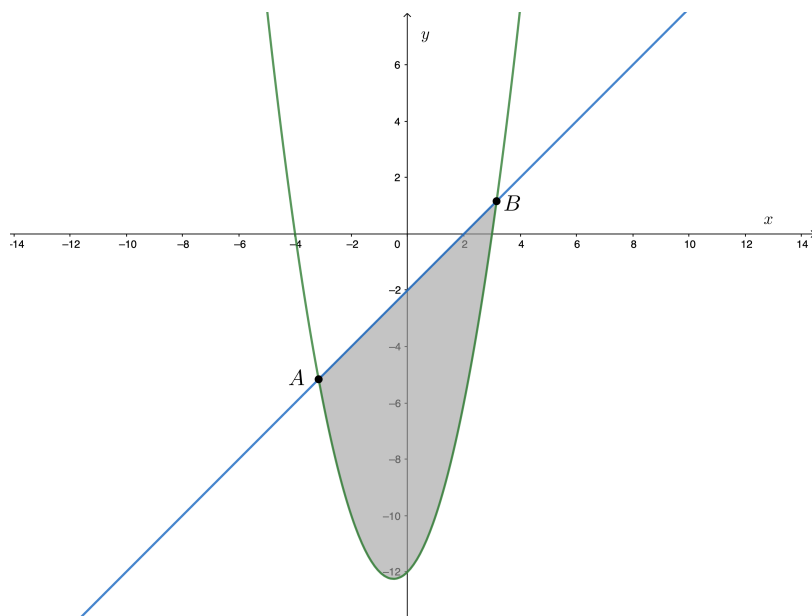
$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

a to je

$$P = \int_a^b (f - g)(x)dx.$$

Zadatak 67. Odredite površinu lika u ravnini koji je omeđen parabolom $y = x^2 + x - 12$ i pravcem $y = x - 2$.

Rješenje: Nacrtajmo pravac i parabolu i označimo traženu površinu.



Slika 6.4.2: Rješenje zadatka 67

Kako bismo odredili granice integracije, moramo pronaći točke presjeka pravca i parabole:

$$x^2 + x - 12 = x - 2$$

$$x^2 - 10 = 0$$

$$(x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{10}.$$

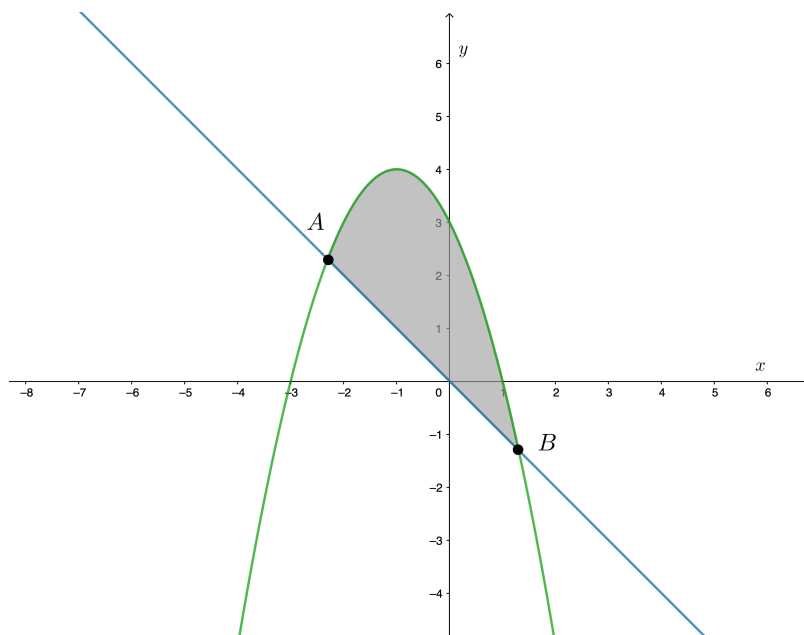
Sad računamo traženu površinu:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} [(x - 2) - (x^2 + x - 12)] dx \\ &= \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} (-x^2 + 10) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 10x \right) \Big|_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \\ &= -\frac{\sqrt{10}^3}{3} + 10\sqrt{10} - \left(-\frac{(-\sqrt{10})^3}{3} + 10(-\sqrt{10}) \right) = \frac{40\sqrt{10}}{3}. \end{aligned}$$

Zadatak 68. Odredite površinu lika omeđenog parabolom

$y = -x^2 - 2x + 3$ i pravcem $y = -x$.

Rješenje: Nacrtajmo pravac i parabolu i označimo traženu površinu.



Slika 6.4.3: Rješenje zadatka 68

Kako bismo odredili granice integracije, moramo pronaći točke presjeka pravca i parabole:

$$-x^2 - 2x + 3 = -x$$

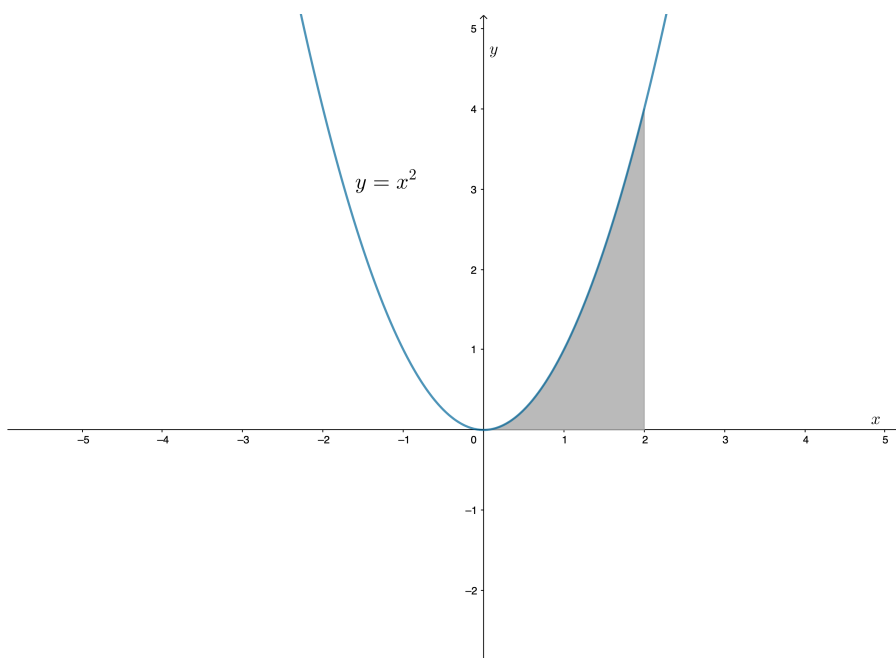
$$-x^2 - x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{-2}.$$

Sad računamo traženu površinu:

$$\begin{aligned} P &= \int_{\frac{1+\sqrt{13}}{-2}}^{\frac{1-\sqrt{13}}{-2}} [(-x^2 - 2x + 3) - (-x)] dx \\ &= \int_{\frac{1+\sqrt{13}}{-2}}^{\frac{1-\sqrt{13}}{-2}} (-x^2 - x + 3) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Bigg|_{\frac{1+\sqrt{13}}{-2}}^{\frac{1-\sqrt{13}}{-2}} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{13})^3}{24} - \frac{(1 - \sqrt{13})^2}{8} - \frac{3(1 - \sqrt{13})}{2} \\ &\quad - \left[\frac{(1 + \sqrt{13})^3}{24} - \frac{(1 + \sqrt{13})^2}{8} - \frac{3(1 + \sqrt{13})}{2} \right] \\ &= -\frac{32\sqrt{13}}{24} + \frac{4\sqrt{13}}{8} + 3\sqrt{13} = \frac{13\sqrt{13}}{6}. \end{aligned}$$

Zadatak 69. Odredite površinu lika sa slike 6.4.4.



Slika 6.4.4: Zadani elementi zadatka 69

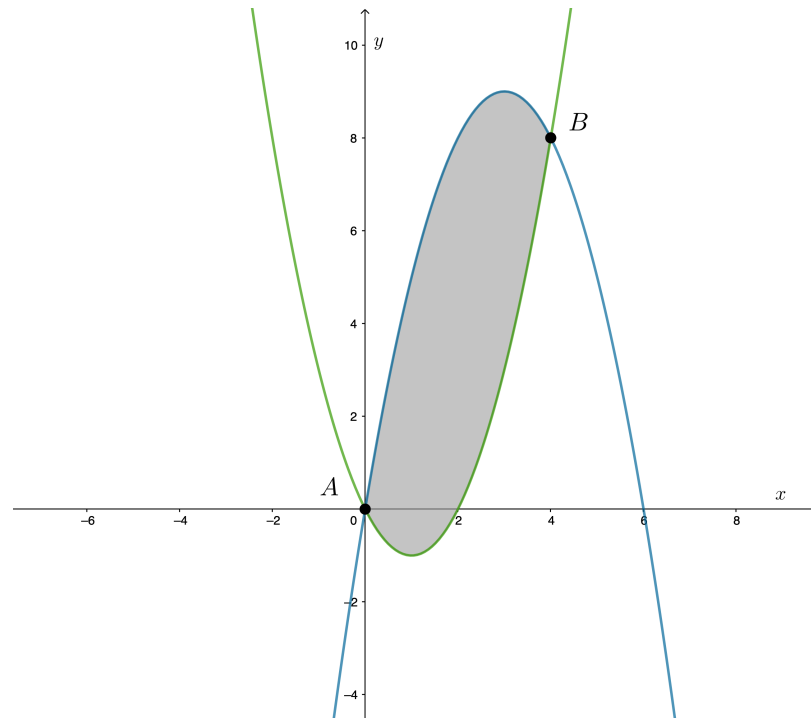
Rješenje:

$$P = \int_0^2 (x^2 - 0) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

Zadatak 70. Odredite površinu lika omeđenog parabolama $y = -x^2 + 6x$ i $y = x^2 - 2x$.

Rješenje:

Nacrtajmo zadane parabole i označimo traženu površinu.



Slika 6.4.5: Rješenje zadatka 70

Kako bismo odredili granice integracije, moramo pronaći točke presjeka parabola:

$$-x^2 + 6x = x^2 - 2x$$

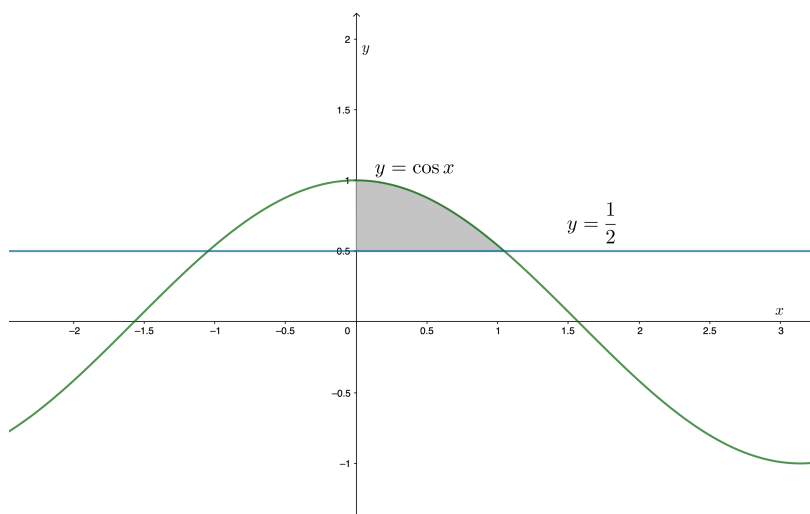
$$-2x^2 + 8x = 0$$

$$-2x(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$\begin{aligned} P &= \int_0^4 [(-x^2 + 6x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) dx \\ &= \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = -\frac{128}{3} + 64 = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Zadatak 71. Odredite površinu lika sa slike 6.4.6.



Slika 6.4.6: Zadani elementi zadatka 71

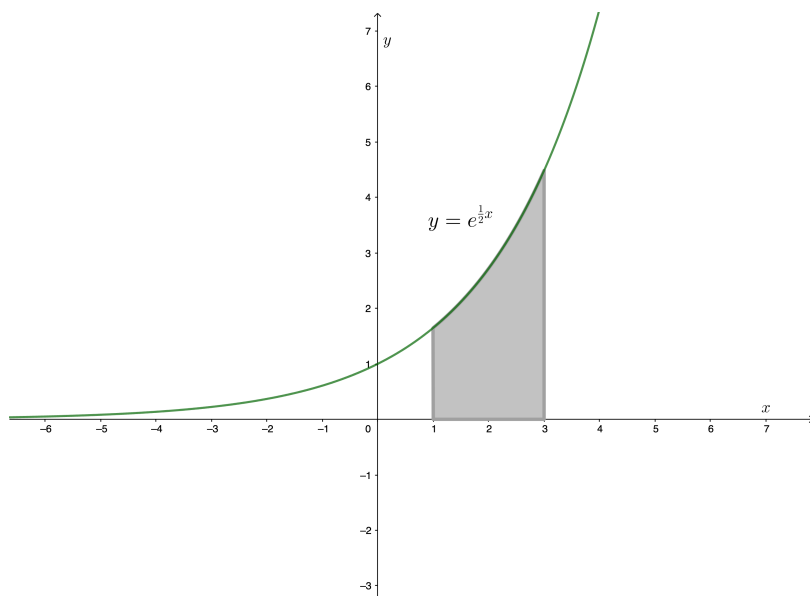
Rješenje:

Kako bismo odredili granice integracije, moramo riješiti jednadžbu

$$\cos x = \frac{1}{2}, x \in [0, \pi] \implies x = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - \frac{1}{2}) dx = \left(\sin x - \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - (\sin 0 - 0) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Zadatak 72. Odredite površinu lika sa slike 6.4.7.



Slika 6.4.7: Zadani elementi zadatka 72

Rješenje:

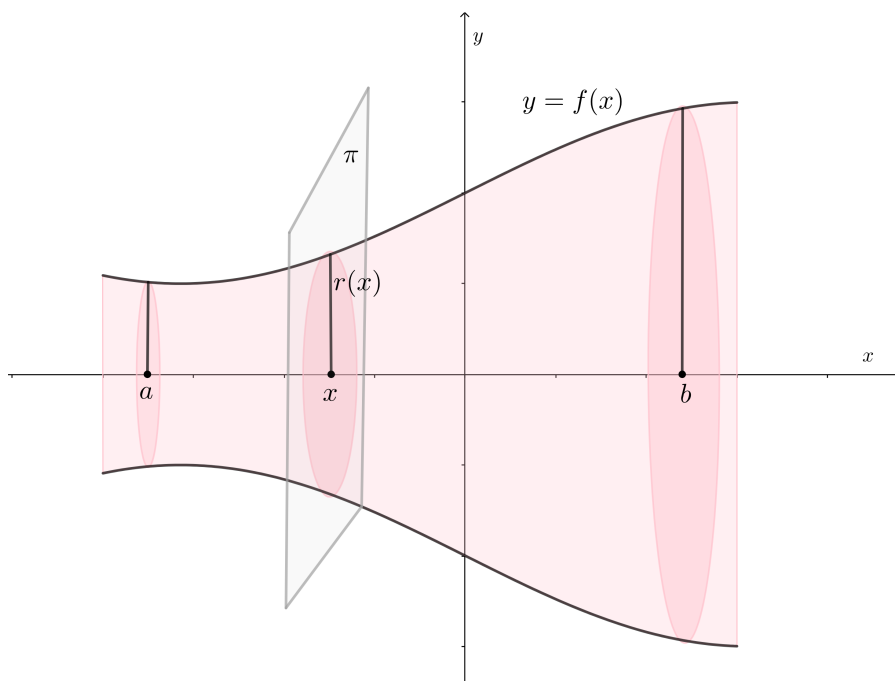
$$\begin{aligned}
 P &= \int_1^3 e^{\frac{1}{2}x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \frac{1}{2}x \\ du = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2du \end{array} \right\} \\
 &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^u du = 2e^u \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = 2(e\sqrt{e} - \sqrt{e}) = 2\sqrt{e}(e - 1).
 \end{aligned}$$

Zadatak 73. Odredite površinu lika omeđenog parabolama $y = x^2 - 5x$ i $y = -x^2 + 9x - 18$.

Rješenje: $P = 15.62$.

6.5 VOLUMENI ROTACIJSKIH TIJELA

Uzmimo neprekidnu funkciju $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Rotacijom luka krivulje $y = f(x)$ oko osi x na segmentu $[a, b]$ dobivamo **rotacijsko tijelo**. Presjek rotacijskog tijela ravninom okomitom na os x krug je radijusa $r(x)$ čija je površina $P(x) = \pi r^2(x)$, gdje je $r(x) = |f(x)|$.



Slika 6.5.1: Volumen rotacijskog tijela

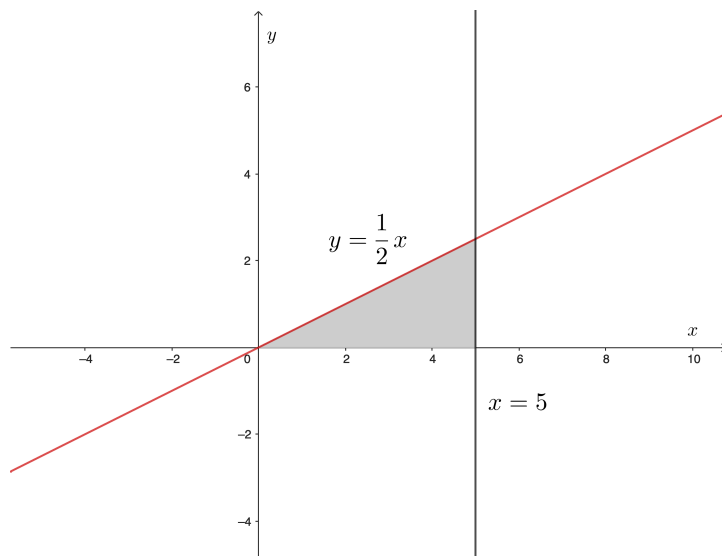
Zamislamo da volumen rotacijskog tijela dobivamo zbrajanjem površina beskonačno mnogo krugova. Analogan zbrajanju beskonačno površina bilo bi integriranje površina po varijabli x , pa dobivamo formulu

$$V = \pi \int_a^b r^2(x) dx.$$

Na sličan način dobiva se volumen rotacijskog tijela koje nastaje rotacijom krivulje oko osi y ili bilo kojeg pravca što ćemo pokazati u zadatcima na kraju ove cjeline.

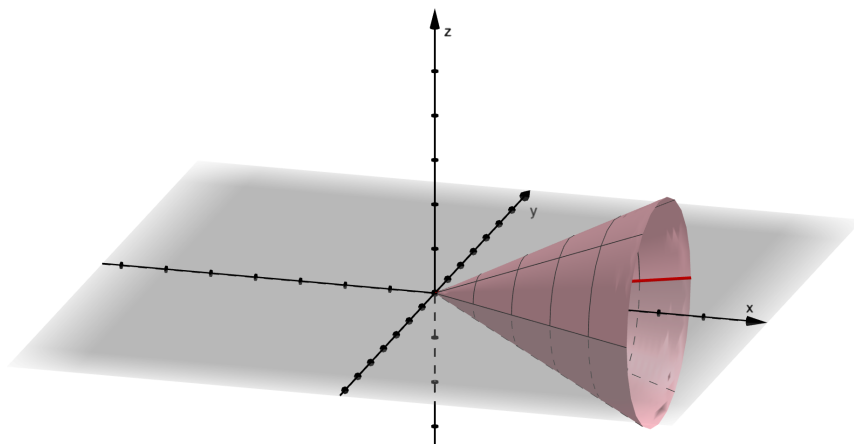
Više o volumenu rotacijskog tijela može se pronaći u knjigama [1] i [11].

Primjer 15. *Odredite volumen tijela koji nastaje rotacijom lika sa slike oko osi x .*



Slika 6.5.2: Zadani elementi primjera 15

Rješenje: Skicirajmo rotacijsko tijelo:



Slika 6.5.3: Rješenje primjera 15

Primijenimo formulu za volumen rotacijskog tijela koje nastaje rotacijom pravca $y = \frac{1}{2}x$ na segmentu od 0 do 5.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\pi \int_0^5 x^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = \frac{\pi}{12} (5^3 - 0^3) = \frac{125\pi}{12}. \end{aligned}$$

Riješimo sad gornji zadatak standardnom formulom za volumen stošca

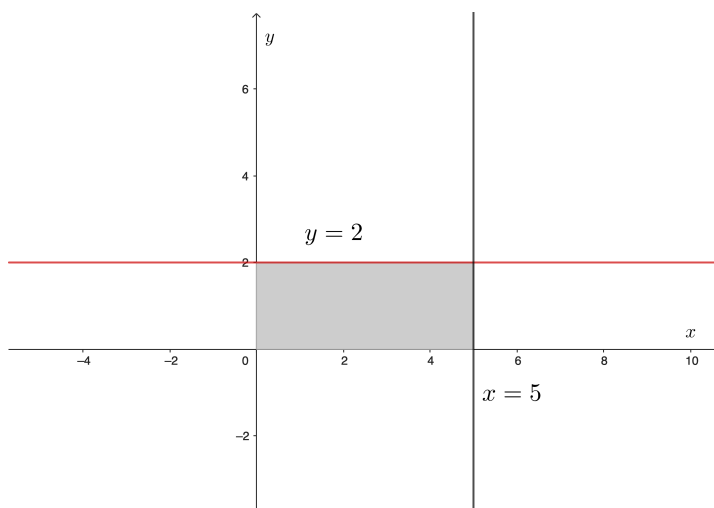
$$V = \frac{1}{3}r^2\pi v.$$

Radijus osnovice stošca jednak je y koordinati sjecišta pravaca $y = \frac{1}{2}x$ i $x = 5$ tj. $r = \frac{5}{2}$. Visina stošca je $v = 5$. Sad dobivamo

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 5 = \frac{125\pi}{12}.$$

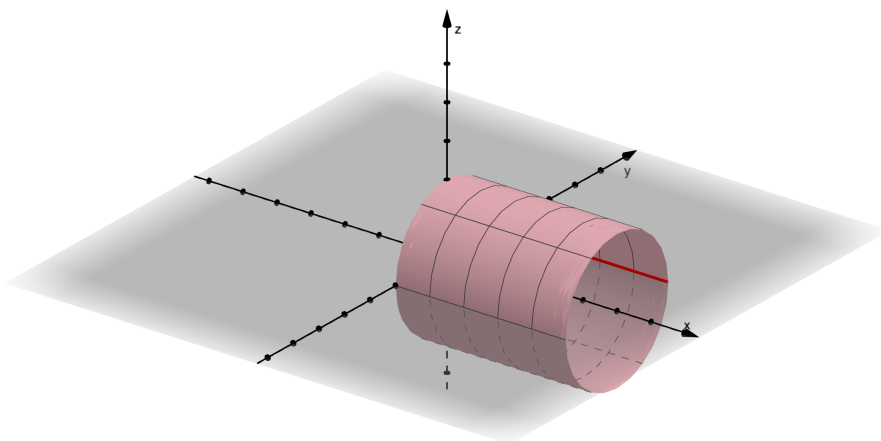
Primijetimo da gornje rješenje odgovara rješenju koje smo dobili upotrebom integralne formule za volumen.

Primjer 16. Odredite volumen tijela koji nastaje rotacijom lika sa slike oko osi x .



Slika 6.5.4: Zadani elementi primjera 16

Rješenje: Skicirajmo rotacijsko tijelo:



Slika 6.5.5: Rješenje primjera 16

Primijenimo formulu za volumen rotacijskog tijela koje nastaje rotacijom pravca $y = 2$ na segmentu od 0 do 5.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 2^2 dx = 4\pi \int_0^5 dx \\ &= 4\pi \cdot x \Big|_0^5 = 4\pi (5 - 0) = 20\pi. \end{aligned}$$

Riješimo sad gornji zadatak standardnom formulom za volumen valjka

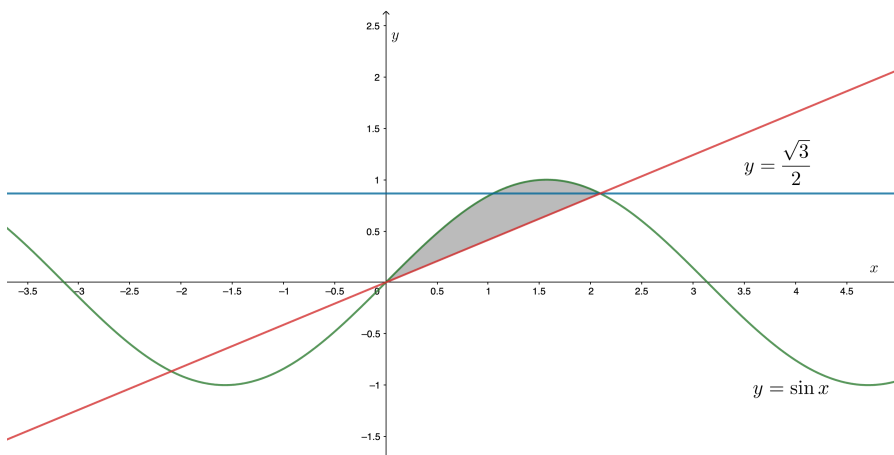
$$V = r^2 \pi v.$$

Radijus osnovice valjka iznosi $r = 2$, a visina $v = 5$. Sad dobivamo

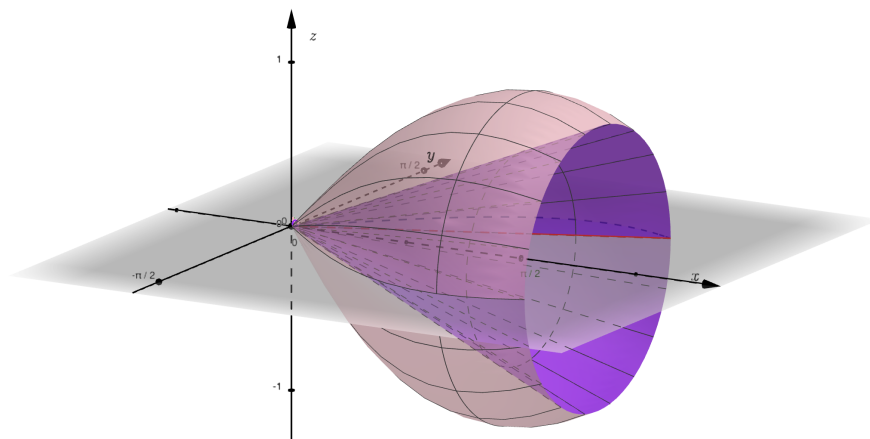
$$V = 2^2 \pi \cdot 5 = 20\pi.$$

Primijetimo da gornje rješenje odgovara rješenju koje smo dobili upotrebom integralne formule za volumen.

Zadatak 74. Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika sa slike 6.5.6 oko x -osi.



Slika 6.5.6: Zadani elementi zadatka 74

Rješenje:

Slika 6.5.7: Rješenje zadatka 74

Najprije napišimo jednadžbu pravca p koji prolazi kroz ishodište i točku $T(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Traženi pravac je $y = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}x$. Kako bismo dobili volumen traženog rotacijskog tijela, moramo od volumena tijela koje nastaje rotacijom grafa funkcije $f(x) = \sin x$ oduzeti volumen stošca. Sad imamo da je volumen tijela

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{8}, \end{aligned}$$

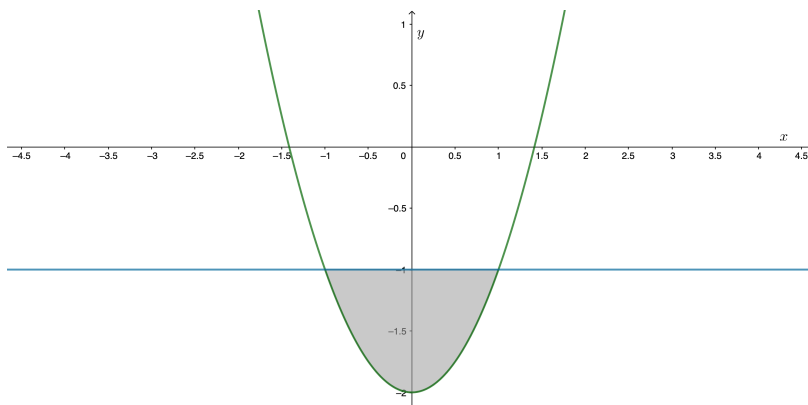
a volumen stošca radijusa baze $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i visine $\frac{2\pi}{3}$

$$V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi v = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \pi \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi\sqrt{3}}{8}.$$

Zadatak 75. Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x -osi lika omeđenog parabolom $y = x^2 - 2$ i pravcem $y = -1$.

Rješenje: Skicirajmo najprije površinu omeđenu zadanim funkcijama.



Slika 6.5.8: Zadani elementi zadatka 75

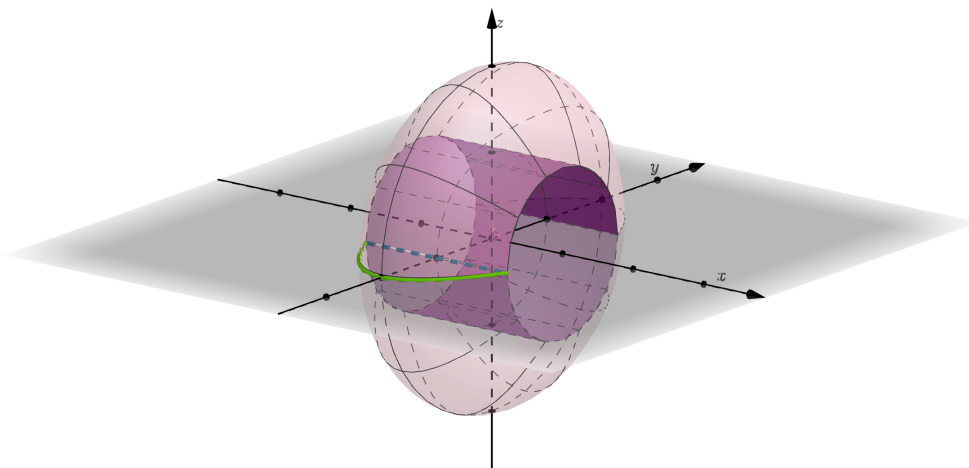
Da bismo odredili granice integracije, moramo naći presjek pravca i parabole:

$$x^2 - 2 = -1$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{1,2} = \pm 1.$$

Skicirajmo traženo rotacijsko tijelo.



Slika 6.5.9: Rješenje zadatka 75

Kako bismo dobili volumen traženog rotacijskog tijela, moramo od volumena tijela koje nastaje rotacijom grafa funkcije $y = x^2 - 2$ oduzeti volumen valjka. Sad imamo da je

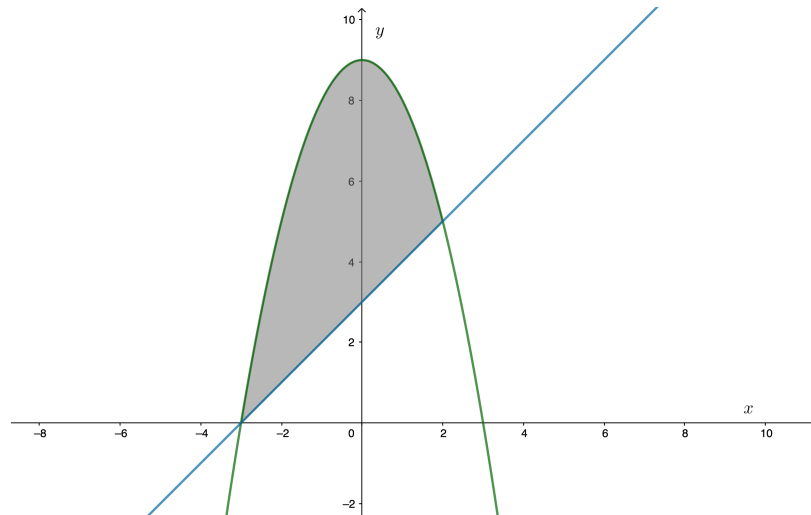
$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-1}^1 (x^2 - 2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 4) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3} + 4 \right) - \pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{4}{3} - 4 \right) \\ &= \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{8}{3} + 8 \right) = \frac{86}{15} \pi, \end{aligned}$$

$$V_2 = r^2 \pi v = 1^2 \pi 2 = 2\pi,$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{86}{15} \pi - 2\pi = \frac{56}{15} \pi.$$

Zadatak 76. *Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x -osi lika omeđenog parabolom $y = -x^2 + 9$ i pravcem $y = x + 3$.*

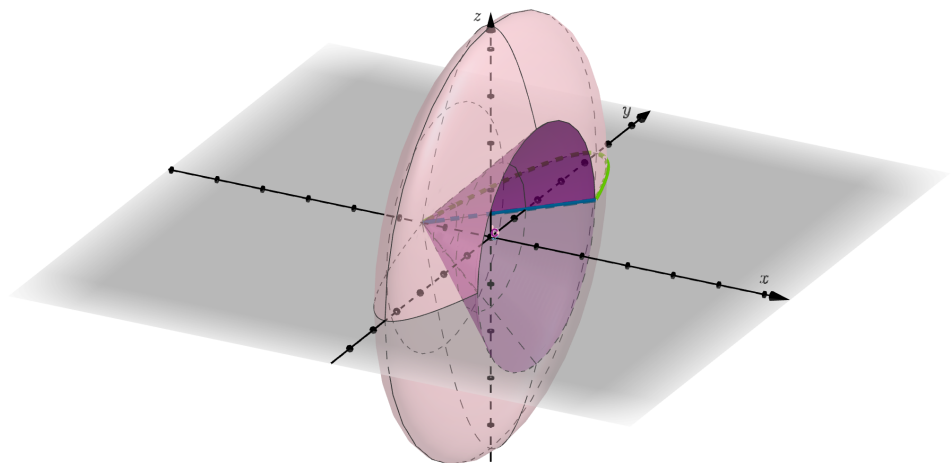
Rješenje:



Slika 6.5.10: Zadani elementi zadatka 76

$$-x^2 + 9 = x + 3$$

$$x_1 = -3, x_2 = 2$$



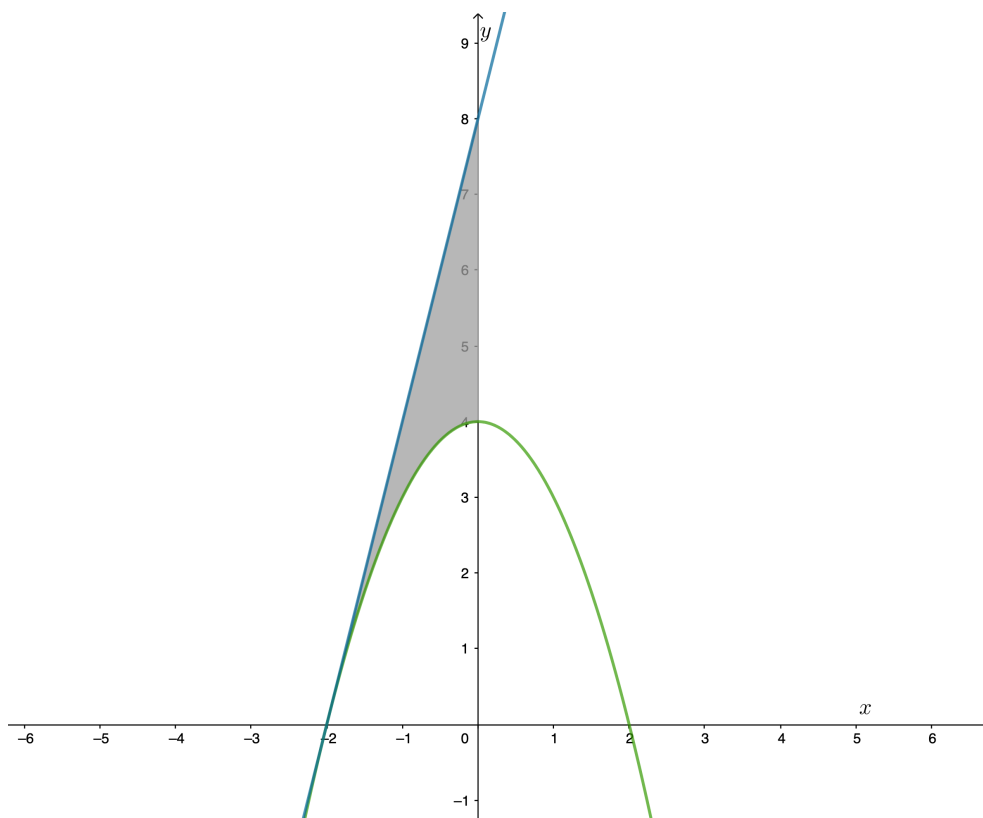
Slika 6.5.11: Rješenje zadatka 76

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \pi \int_{-3}^2 (-x^2 + 9)^2 dx = \pi \int_{-3}^2 (x^4 - 18x^2 + 81) dx \\
 &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x \right) \Big|_{-3}^2 \\
 &= \pi \left(\frac{32}{5} - 48 + 162 \right) - \pi \left(-\frac{243}{5} + 162 - 243 \right) = 250\pi,
 \end{aligned}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi v = \frac{1}{3} 5^2 \pi 5 = \frac{125}{3} \pi,$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{625}{3} \pi.$$

Zadatak 77. Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika sa slike 6.5.12 oko y -osi.



Slika 6.5.12: Zadani elementi zadatka 77

Rješenje: Najprije napišimo jednadžbu parabole:

$$y = ax^2 + c$$

$$4 = 0 + c \Rightarrow c = 4$$

$$y = ax^2 + 4$$

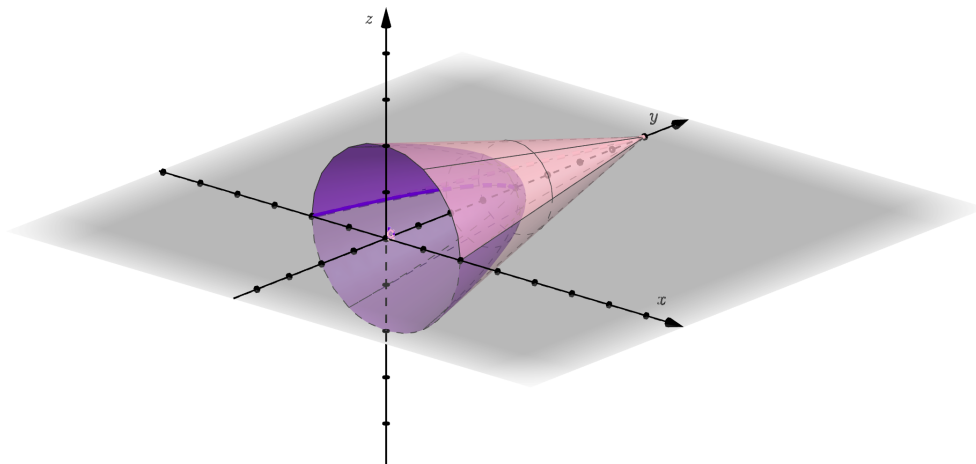
$$0 = 4a + 4 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 4.$$

Napišimo jednadžbu pravca (tangente parabole u točki $T(-2, 0)$):

$$y' = -2x \Rightarrow k = 4,$$

$$y - 0 = 4(x + 2) \Rightarrow y = 4x + 8.$$



Slika 6.5.13: Rješenje zadatka 77

Kako smo sad radili rotaciju oko osi y , radijus rotacijskog tijela ćemo izraziti kao funkciju u varijabli y :

$$y = -x^2 + 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4 - y}$$

tj. $r(y) = \sqrt{4 - y}$.

$$V_1 = \frac{1}{3}r^2\pi v = \frac{1}{3}2^2\pi 8 = \frac{32}{3}\pi,$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^4 [r(y)]^2 dy = \pi \int_0^4 \sqrt{4 - y}^2 dy = \pi \int_0^4 (4 - y) dy \\ &= \pi \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \pi (16 - 8) = 8\pi, \end{aligned}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{32}{3}\pi - 8\pi = \frac{8}{3}\pi.$$

KAZALO

- arkus kosinus, 98
- arkus kotangens, 99
- arkus sinus, 97
- arkus tangens, 98
- asimptota funkcije, 120

- baza, 26
- bijekcija, 85

- Cauchyjeva definicija limesa, 103
- ciklometrijske funkcije, 97

- dekadski logaritam, 91
- derivacija funkcije, 110
- derivacija funkcije u točki, 110
- desni koordinatni sustav, 45
- determinanta, 50
- domena, 85
- donja Darbouxova suma, 143
- donja integralna suma, 142
- donji Riemannov integral, 143

- eksponencijalna funkcija, 89
- eksponencijalno preslikavanje, 92
- ekstenzija ili proširenje funkcije, 86

- funkcija ili preslikavanje, 85

- gornja Darbouxova suma, 143
- gornja integralna suma, 142
- gornji Riemannov integral, 143
- graf funkcije, 85

- horizontalna asimptota, 120

- infimum, 141
- injekcija, 85
- inverzna funkcija, 85

- jedinični vektor, 17

- jednadžba pravca, 59
- jednadžba ravnine, 57

- kanonski oblik jednažbe pravca, 60
- karakterizacija okomitosti, 33
- kodomena, 85
- kolinearni vektori, 9
- komplanarni vektori, 13
- kompozicija funkcija, 85
- konstanta, 87
- koordinatni sustav, 27
- kosa asimptota, 120
- kosinus, 93
- kotangens, 94
- kritična točka, 119
- kut između vektora, 32
- kvadratna funkcija, 88

- L'Hospitalovo pravilo, 117
- Laplaceov razvoj determinante, 51
- lijevi koordinatni sustav, 46
- limes funkcije, 104
- limes s desna, 105
- limes s lijeva, 104
- linearna funkcija, 87
- linearna kombinacija vektora, 20
- logaritamska funkcija, 90
- lokalni maksimum, 118
- lokalni minimum, 118

- metoda supstitucije, 139
- mješoviti produkt vektora, 54
- množenje vektora i skalara, 17
- modul ili norma vektora, 9

- neodređeni integral, 137
- neodređeni oblici, 106
- neparna funkcija, 86

- neprekidna funkcija, 104
- Newton Leibnitzova formula, 144
- normala ravnine, 57
- nulvektor, 12
- okolina točke, 103
- omeđena funkcija, 141
- opća potencija, 91
- opći oblik jednadžbe ravnine, 58
- ortogonalna baza, 41
- ortogonalni vektori, 41
- ortonormirana baza, 41
- padajuća funkcija, 86, 118
- parametarski oblik jednadžbe pravca, 60
- parna funkcija, 86
- particija segmenta, 141
- period funkcije, 86
- periodična funkcija, 86
- podintegralna funkcija, 137
- polinom, 87
- površina ravninskog lika, 146
- pravokutne koordinate, 41
- pravokutni koordinatni sustav, 41
- primitivna funkcija, 137
- prirodni logaritam, 91
- profinjenje particije, 141
- racionalna funkcija, 89
- radijvektor, 28
- rastuća funkcija, 86, 118
- realna matrica, 49
- restrikcija ili suženje funkcije, 86
- Riemanov integral, 144
- rotacijsko tijelo, 152
- sekanta, 109
- sinus, 93
- skalarna projekcija, 39
- skalarni produkt, 32
- slika funkcije, 85
- stacionarna točka, 119
- supremum, 141
- surjekcija, 85
- tangens, 94
- tangenta, 110
- vektor, 9
- vektorska projekcija, 39
- vektorski produkt, 46
- vertikalna asimptota, 120
- volumen rotacijskog tijela, 152
- zbrajanje vektora, 14
- zlatni rez, 44

BIBLIOGRAFIJA

- [1] Aglič Aljinović, Andrea; Brnetić, Ilko; Čepulić, Vladimir; Elezović, Neven; Marangunić, Ljubo; Pašić, Mervan; Žubrinić, Darko; Županović, Vesna. 2014. *Matematika 1*, Element.
- [2] Antonić, Nenad; Vrdoljak, Marko. 2001. *Mjera i integral*, PMF - Matematički odjel.
- [3] Babić, Ivanka; Horvatić-Baldasari, Ksenija. 1997. *Nacrtna geometrija*, Sand d.o.o., Zagreb.
- [4] Beban-Brkić, Jelena; Jovičić, Damjan; 2007. Distance From Point to Line and From Point to Plane, *MIŠ* 42, 61 - 68.
- [5] Beban-Brkić, Jelena; Šimić Horvath, Marija. 2014. Interaction among Courses, *Proceeding of the 16th International Conference on Geometry and Graphics*, Innsbruck University Press, 690-696.
- [6] Elezović, Neven. 2006. *Linearna algebra*, Element.
- [7] Gorjanc, Sonja; Jurkin, Ema; Kodrnja, Iva; Koncul, Helena. *Deskripciona geometrija*, <http://www.grad.hr/geometrija/udzbenik/>.
- [8] Hrnčević, Juraj. 2011. *Matematika*, Arhitektonski fakultet, Sveučilište u Zagrebu (neobjavljeni nastavni materijal).
- [9] <https://arhitektzg.sharepoint.com/>.
- [10] Slapničar, Ivan. 2018. *Matematika 1*, Kartular, Split.
- [11] Slapničar, Ivan. 2019. *Matematika 2*, Kartular, Split.