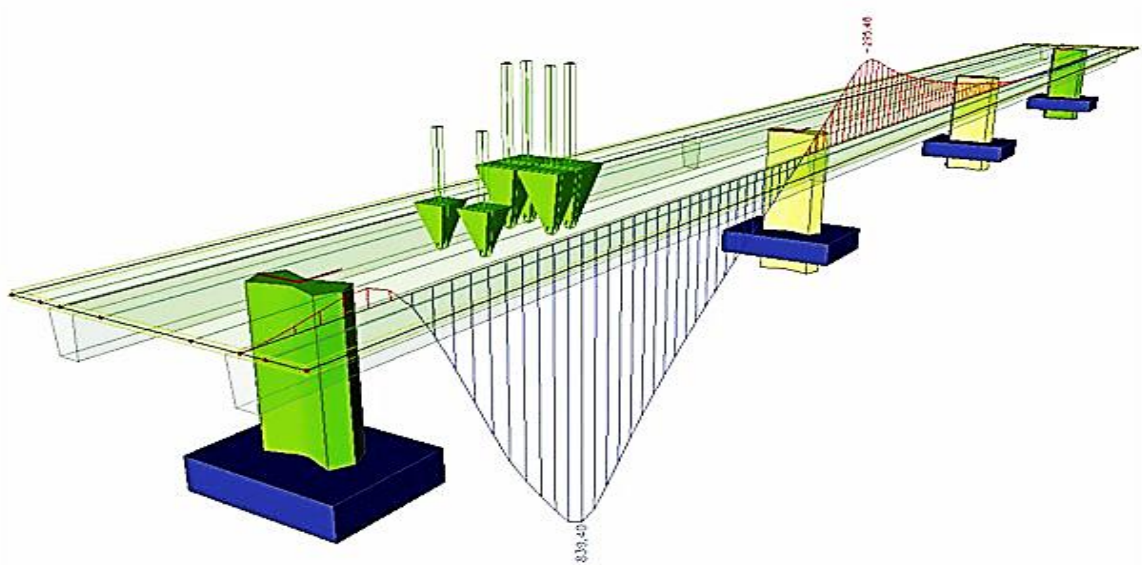


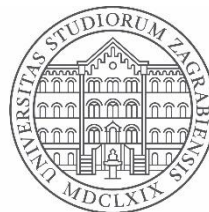
Udžbenik za studij arhitekture iz kolegija
NOSIVE KONSTRUKCIJE I

OSNOVE STATIKE ZA ARHITEKTE

Josip Galić, Berislav Medić i Nenad Turčić



Af



Sveučilište u Zagrebu, Arhitektonski fakultet
Zagreb, 2025. g.

ACTA ARCHITECTONICA – DIGITALNI UDŽBENICI

Josip Galić, Berislav Medić, Nenad Turčić

OSNOVE STATIKE ZA ARCHITEKTE

**Udžbenik za studij arhitekture iz kolegija
NOSIVE KONSTRUKCIJE I**

Af



**Sveučilište u Zagrebu, Arhitektonski fakultet
Zagreb, 2025. g.**

IMPRESSUM

Naslov digitalnog udžbenika:

OSNOVE STATIKE ZA ARHITEKTE

Autori:

Prof. dr. sc. Josip Galić

V. pred. mr. sc. Berislav Medić

V. pred. Nenad Turčić

Sveučilište u Zagrebu, Arhitektonski fakultet

Recenzenti:

Prof. dr. sc. Tomislav Kišiček

Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet

Prof. v. š. dr. sc. Igor Gukov

Tehničko veleučilište u Zagrebu, Studij graditeljstva

Dr. sc. Miljenko Haiman

Profesor Arhitektonskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu u mirovini

Lektor:

Josipa Bosnić, mag. educ. philol. croat.

Crteži i fotografije:

Josip Galić

Berislav Medić

Nenad Turčić

Slika na omotu:

Josip Galić

Nakladnik:

Sveučilište u Zagrebu, Arhitektonski fakultet

Kačićeva 26., HR-10000 Zagreb

Uporabu digitalnog udžbenika odobrilo je Povjerenstvo za nakladničku djelatnost Arhitektonskog fakulteta Sveučilište u Zagrebu na sjednici održanoj 24. travnja 2025. godine.

ISBN: 978-953-8042-83-6

Zagreb, travanj 2025. g.

Sadržaj

Sadržaj.....	I
Predgovor	III
Oznake i mjerne jedinice.....	V
1. Uvod.....	1
1.1. Što smatramo nosivom konstrukcijom.....	1
1.2. Materijali.....	5
1.3. Opterećenja	7
2. Sustav sila u ravnini	16
2.1. Pojam sile.....	16
2.2. Centralni sustav sila i rezultanta sustava.....	16
2.3. Opći sustav sila i rezultanta sustava.....	23
3. Ravnoteža sustava	30
3.1. Općenito o ravnoteži	30
3.2. Ravnoteža centralnog sustava sila.....	30
3.3. Ravnoteža općeg ravninskog sustava sila	35
3.4. Analitički uvjeti ravnoteže općeg ravninskog sustava sila.....	36
3.5. Grafički uvjeti ravnoteže općeg ravninskog sustava sila	40
4. Ravnoteža krutog tijela u ravnini	45
4.1. Ležajevi konstrukcije: konzola i greda.....	45
4.2. Statički određeni i neodređeni nosači.....	47
4.3. Određivanje reakcija u ležajevima	50
5. Unutarnje sile	60
5.1. Općenito o unutarnjim silama	60
5.2. Pravila za određivanje i crtanje dijagrama unutarnjih sila	63
6. Konstrukcijski sustavi	82
6.1. Međusobne veze krutih tijela	82
6.2. Gerberova greda.....	84
6.3. Lučne konstrukcije.....	91

6.4. Lančnice.....	98
6.5. Okvirne konstrukcije	100
6.6. Rešetkaste konstrukcije	117
6.7. Vierendeelov nosač	133
6.8. Ostale sastavljene konstrukcije.....	136
7. Geometrijska svojstva ploha, naprezanja i deformacije	142
7.1. Geometrijska svojstva ploha.....	142
7.2. Naprezanja.....	150
7.3. Deformacije	160
8. Zadaci za vježbu.....	164
9. Literatura	177

Predgovor

Skripta / digitalni udžbenik *Osnove statike za arhitekte* nastala je objedinjavanjem nastavnog materijala na predmetu Nosive konstrukcije I na Arhitektonskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Namijenjena je prvenstveno studentima arhitekture s ciljem da ih se upozna s osnovama građevne statike nužne za proračun nosivih konstrukcija. Pisana je na nešto jednostavniji način nego je to uobičajeno za udžbenike građevne statike namijenjene studentima građevinarstva. Upravo se ta jednostavnost pokazala prihvaćenom ne samo kod studenata arhitekture Arhitektonskog fakulteta u Zagrebu nego i na drugim arhitektonskim fakultetima u zemlji i regiji, ali i kod studenata građevinarstva. Cilj nije prikazivati teške i matematičke izvode, nego što jednostavnije prikazati osnove i logiku građevne statike i njezine primjene, ali vodeći računa o tome da se objasne osnovni i najčešće korišteni postupci proračuna. Stoga udžbenik osim osnovnog teorijskog dijela ima puno riješenih primjera jer smatramo da se pomoću njih građevna statika najbolje razumije i uči.

Knjiga *Osnove statike za arhitekte* osim uvodnog poglavlja sadržava 6 glavnih poglavlja, zadatke za vježbu i popis literature. Tim glavnim poglavljima prethodi poglavlje pod nazivom *Oznake i mjerne jedinice* s ciljem da se studente i korisnike knjige odmah nedvojbeno upozna s oznakama i mjernim jedinicama koje se rabe u tekstu ostalih poglavlja. Naravno, to je studentima arhitekture korisno i za ostale kolegije iz područja nosivih konstrukcija.

U prvom poglavlju opisuje se što je to nosiva konstrukcija i zašto je važna. Navedeni su uobičajeni materijali od kojih se izrađuju nosive konstrukcije i opterećenja koja djeluju na nosive konstrukcije građevina.

U drugom su poglavlju objašnjeni pojmovi sile, centralnog sustava sila i općeg sustava sila. Također su dani grafički i analitički postupci određivanja resultantnih sila sustava. Sve je to dodatno pojašnjeno riješenim primjerima.

U trećem poglavlju objašnjeno je što je to ravnoteža sila i ravnoteža sustava sila. Također su dani grafički i analitički postupci određivanja sila koje uravnotežuju sustav sila. Sve to dodatno je pojašnjeno riješenim primjerima.

U četvrtom poglavlju tema je ravnoteža krutog tijela u ravnini. Najprije je objašnjeno što je to kruto tijelo i koje su vrste ležajeva kod grednih i konzolnog nosača te kako broj ležajeva određuje radi li se o statički određenom i neodređenom nosaču. Opisan je postupak određivanja sila u ležajevima kako bi tijelo bilo u ravnoteži. Sve je to dodatno pojašnjeno riješenim primjerima.

U petom poglavlju objašnjeno je da uslijed vanjskih djelovanja na neko kruto tijelo u njemu nastaju unutarnje sile. Opisane su vrste unutarnjih sila, postupak određivanja njihovih vrijednosti kao i pravila za određivanje i crtanje dijagrama unutarnjih sila. Sve je to dodatno pojašnjeno riješenim primjerima.

Šesto je poglavlje najopsežnije. U realnim konstrukcijama kruta tijela povezuju se međusobno vezama i tim povezivanjem formiraju različite konstrukcijske sustave. U ovom poglavlju prikazani su najuobičajeniji konstrukcijski sustavi kao što su Gerberovi nosači, lučne konstrukcije, lančаницe, okvirne konstrukcije, rešetkaste konstrukcije i dr. Za sve pojedine tipove konstrukcijskih sustava dani su postupci proračuna i najvažnija pravila za proračun. Sve je to dodatno pojašnjeno pomoću riješenih primjera.

Sedmo poglavlje zaključno je poglavlje i uvod u otpornost materijala. U prethodnim je poglavljima objašnjeno kako uslijed vanjskih djelovanja (opterećenja) različitih konstrukcijskih sustava u konstrukciji nastaju unutarnje sile. U ovom su poglavlju pojašnjene geometrijske karakteristike ploha i kako odrediti naprezanja i relativne deformacije u pojedinim presjecima nosive konstrukcije. Naravno,

to je objašnjeno na elementarnoj razini poznavanja otpornosti materijala i za linearno elastične materijale korištenjem Hookeova zakona. Sve je to dodatno pojašnjeno riješenim primjerima.

U osmom poglavlju dani su zadatci za vježbu kako bi se njihovim samostalnim rješavanjem usvojilo gradivo iz građevne statike. Ti su zadatci nadogradnja na riješene primjere u pojedinim poglavljima.

Na kraju je dan popis literature kojom su se autori služili u nastajanju ovog udžbenika.

Ovaj će udžbenik pomoći novim generacijama studenata arhitekture, ali i studentima građevinarstva da se upoznaju s osnovama građevne statike i njezine primjene u projektiranju nosivih konstrukcija.

U planu je proširenje predmetnog udžbenika s dodatnim obrazloženjima, postupcima i primjerima s ciljem izrade sveučilišnog udžbenika iz osnova građevne statike i otpornosti materijala za studente arhitektonskih fakulteta u Hrvatskoj i regiji.

Kako bi se knjiga poboljšala u budućim izdanjima, molimo čitatelje da nas obavijeste ako u njoj uoče pogreške ili nejasnoće.

Autori

Oznake i mjerne jedinice

1. Osnovne jedinice

U Hrvatskoj se primjenjuju jedinice Međunarodnog sustava jedinica - SI (franc. *Le System International d'Unites*) u skladu s ISO 1000. Međunarodni sustav jedinica moderni je metrički sustav mjera koji je 1960. uspostavila Generalna konferencija o utezima i mjerama (CGPM, *Conférence Générale des Poids et Mesures*). CGPM međunarodna je organizacija koja se brine o širenju SI i, po potrebi, o njegovoj modifikaciji, sukladno napretku u znanosti i tehnologiji. Sadašnja verzija SI, usvojena 1971. godine, temelji se na sedam osnovnih jedinica za sedam osnovnih veličina koje su međusobno neovisne.

Tablica 1. Osnovne jedinice SI sustava

Osnovna veličina	Osnovna jedinica	
	Ime	Simbol
dužina	metar	m
vrijeme	sekunda	s
masa	kilogram	kg
količina tvari	mol	mol
termodinamička temperatura	kelvin	K
jakost struje	amper	A
intenzitet svjetla	kandela	cd

Za osnovne jedinice i proračun u području nosivih konstrukcija preporučuju se ove jedinice:

1. za **silu** - **N** (newton, $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \times \text{m/s}^2$)
2. za **duljinu** - **m, m¹** (metar, tekući metar)
3. za **ploštinu (površinu)** - **m²** (četvorni ili kvadratni metar)
4. za **zapreminu (volumen)** - **m³** (prostorni ili kubični metar)
5. za **masu** - **kg, t** (kilogram, tona)
6. za **naprezanje i čvrstoću** - **Pa** (paskal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \times \text{m}^2$)
7. za **opterećenje**:
 - po jedinici duljine - **N/m** (newton po metru)
 - po jedinici ploštine - **N/m²** (newton po kvadratnom metru)
 - po jedinici zapremine - **N/m³** (newton po kubičnom metru)
8. za **moment** - **Nm** (newton metar).

Sve ostale mjerne jedinice koje se rabe u proračunu, izvedene su mjerne jedinice (kN, MN, cm, mm i dr.). Slijedi tablični prikaz preračunavanja osnovnih u izvedene mjerne jedinice.

Tablica 2. Preračunavanje sila ili pojedinačnih (koncentriranih) opterećenja

Sila		N	kN	MN	kp	Mp	
1 N	=	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-1}	10^{-4}	N = newton (nova jedinica)
1 kN	=	10^3	1	10^{-3}	10^2	10^{-1}	kN = kilonewton
1 MN	=	10^6	10^3	1	10^5	10^2	MN = meganewton
1 kp	=	10	10^{-2}	10^{-5}	1	10^{-3}	kp = kilopond (stara jedinica)
1 Mp	=	10^4	10	10^{-2}	10^3	1	Mp = megapond

Tablica 3. Preračunavanje rasprostrtog (koncentriranog) opterećenja

Rasprostrto opt.	N/mm	N/m	kN/m	MN/m	kp/cm	kp/m	Mp/m
1 N/mm =	1	10 ³	1	10 ⁻³	1	10 ²	10 ⁻¹
1 N/m =	10 ⁻³	1	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻³	10 ⁻¹	10 ⁻⁴
1 kN/m =	1	10 ³	1	10 ⁻³	1	10 ²	10 ⁻¹
1 MN/m =	10 ³	10 ⁶	10 ³	1	10 ³	10 ⁵	10 ²
1 kp/cm =	1	10 ³	1	10 ⁻³	1	10 ²	10 ⁻¹
1 kp/m =	10 ⁻²	10	10 ⁻²	10 ⁻⁵	10 ⁻²	1	10 ⁻³
1 Mp/m =	10	10 ⁴	10	10 ⁻²	10	10 ³	1

Tablica 4. Preračunavanje naprežanja, čvrstoće i plošnih opterećenja

Naprežanje / plošno opt.	N/mm ²	N/m ²	kN/m ²	MN/m ²	kp/mm ²	kp/cm ²	kp/m ²	Mp/mm ²	Mp/cm ²	Mp/m ²
1 N/mm ² =	1	10 ⁶	10 ³	1	10 ⁻¹	10	10 ⁵	10 ⁻⁴	10 ⁻²	10 ²
1 N/m ² =	10 ⁻⁶	1	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	10 ⁻⁵	10 ⁻¹	10 ⁻¹⁰	10 ⁻⁸	10 ⁻⁴
1 kN/m ² =	10 ⁻³	10 ³	1	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻²	10 ²	10 ⁻⁷	10 ⁻⁵	10 ⁻¹
1 MN/m ² =	1	10 ⁶	10 ³	1	10 ⁻¹	10	10 ⁵	10 ⁻⁴	10 ⁻²	10 ²
1 kp/mm ² =	10	10 ⁷	10 ⁴	10	1	10 ²	10 ⁶	10 ⁻³	10 ⁻¹	10 ³
1 kp/cm ² =	10 ⁻¹	10 ⁵	10 ²	10 ⁻¹	10 ⁻²	1	10 ⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻³	10 ⁻¹
1 kp/m ² =	10 ⁻⁵	10	10 ⁻²	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁴	1	10 ⁻⁹	10 ⁻⁷	10 ⁻³
1 Mp/mm ² =	10 ⁴	10 ¹⁰	10 ⁷	10 ⁴	10 ³	10 ⁵	10 ⁹	1	10 ²	10 ⁶
1 Mp/cm ² =	10 ²	10 ⁸	10 ⁵	10 ²	10	10 ³	10 ⁷	10 ⁻²	1	10 ⁴
1 Mp/m ² =	10 ⁻²	10 ⁴	10	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻¹	10 ³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁴	1

Tablica 5. Preračunavanje momenta

Moment	Nmm	Nm	kNm	MNm	kpcm	kpm	Mpm
1 Nmm =	1	10 ⁻³	10 ⁶	10 ⁻⁹	10 ⁻²	10 ⁻⁴	10 ⁻⁷
1 Nm =	10 ³	1	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10	10 ⁻¹	10 ⁻⁴
1 kNm =	10 ⁶	10 ³	1	10 ⁻³	10 ⁴	10 ²	10 ⁻¹
1 MNm =	10 ⁹	10 ⁶	10 ³	1	10 ⁷	10 ⁵	10 ²
1 kpcm =	10 ²	10 ⁻¹	10 ⁻⁴	10 ⁻⁷	1	10 ⁻²	10 ⁻⁵
1 kpm =	10 ⁴	10	10 ⁻²	10 ⁻⁵	10 ²	1	10 ⁻³
1 Mpm =	10 ⁷	10 ⁴	10	10 ⁻²	10 ⁵	10 ³	1

Tablica 6. Preračunavanje gustoće i vlastite težine

Gustoća Vlastita težina	kN/m ³	kg/m ³	kg/dm ³	t/m ³
1 kN/m ³ =	1	10 ²	10 ⁻¹	10 ⁻¹
1 kg/m ³ =	10 ⁻²	1	10 ⁻³	10 ⁻³
1 kg/dm ³ =	10	10 ³	1	1
1 t/m ³ =	10	10 ⁶	1	1

Tablica 7. Preračunavanje duljina

Duljina	Oznaka	Faktor	Primjer
milimetar =	mm	10 ⁻³	1 mm = 10 ⁻³ m = 0,001 m
centimetar =	cm	10 ⁻²	1 cm = 10 ⁻² m = 0,01 m
decimetar =	dm	10 ⁻¹	1 dm = 10 ⁻¹ m = 0,1 m
metar =	m	1	
hektometar =	hm	10 ²	1 hm = 10 ² m = 100 m
kilometar =	km	10 ³	1 km = 10 ³ m = 1000 m
megametar =	Mm	10 ⁶	1 Mm = 10 ⁶ m = 1000000 m

2. Simboli i kratice koje se rabe za proračun konstrukcija

Mala i velika slova (pišu se kosim slovima)

<i>A</i>	ploština ili točka/položaj
<i>B</i>	točka/položaj
<i>C</i>	konstanta ili točka/položaj
<i>D</i>	točka/položaj
<i>E</i>	modul elastičnosti
<i>F</i>	sila ili općenito djelovanje
<i>G</i>	sila ili općenito djelovanje, ali najčešće se misli na stalno djelovanje
<i>G</i>	modul posmika
<i>I</i>	moment tromosti
<i>M</i>	moment (općenito), ali najčešće se odnosi na moment savijanja
<i>N</i>	uzdužna sila
<i>P</i>	sila ili općenito djelovanje, ali najčešće se misli na djelovanje prednapinjanja
<i>Q</i>	sila ili općenito djelovanje, ali najčešće se misli na promjenjivo djelovanje
<i>R</i>	rezultanta unutarnjih sila/naprezanja
<i>R</i>	reakcija
<i>S</i>	unutarnje sile, sile i momenti – općenita oznaka
<i>S</i>	statički moment neke ploštine
<i>T</i>	moment torzije
<i>V</i>	poprečna sila
<i>a</i>	razmak ili geometrijska vrijednost
<i>b</i>	razmak ili geometrijska vrijednost, ali najčešće širina presjeka
<i>d</i>	razmak ili geometrijska vrijednost, ali najčešće promjer kružnog presjeka
<i>e</i>	razmak ili ekscentricitet
<i>f</i>	opća oznaka za čvrstoću nekog materijala
<i>h</i>	razmak ili geometrijska vrijednost, ali najčešće visina presjeka
<i>i</i>	polumjer tromosti
<i>k</i>	koeficijent, faktor
<i>l</i>	(ili ℓ ili L) duljina, raspon (za određene duljine može se l zamijeniti s L ili pisanim malim ℓ kako bi se izbjegla zamjena s brojkom 1)
<i>m</i>	masa
<i>r</i>	polumjer kružnog presjeka
<i>s</i>	opterećenje snijegom
<i>t</i>	debljina (zida, stijenke)
<i>t</i>	širina oslonca (ležaja)
<i>u</i>	opseg presjeka ploštine A
<i>u, v, w</i>	komponente pomaka neke točke
<i>w</i>	opterećenje vjetrom
<i>x, y, z</i>	koordinate
α	kut; omjer
β	kut; omjer
γ	parcijalni koeficijent sigurnosti
γ	zapreminska težina
ε	relativna deformacija
θ	temperatura u °C
λ	vitkost
μ	koeficijent trenja
ν	Poissonov koeficijent
ρ	gustoća
σ	normalno naprezanje
τ	posmično naprezanje
φ	kut

Indeksi donji i gornji (pišu se uspravnim slovima)

c	tlak
F	(ili P) djelovanje, sila
g	(ili G) djelovanje, sila – u praksi najčešće se misli na stalno djelovanje
i	komponenta neke sile
max	najveći, maksimalan
min	najmanji, minimalan
p	(ili P) djelovanje, sila – najčešće se misli na silu prednapinjanja ili promjenjivo djelovanje
q	(ili Q) djelovanje, sila - najčešće se misli na promjenjivo djelovanje
R	rezultanta djelovanja ili otpornost
S	općenito za unutarnje momente i sile
t	(ili ten) vlak
t	(ili tor) torzija
t	ovisno o vremenu
u	krajnji, granični
v	posmik
x, y, z	koordinate ili komponente neke sile

Slova s indeksima (slova se pišu ukoso, a indeksi uspravno)

A_i	promatrana ploština presjeka kao dio ukupne ploštine A
F_x	sila u smjeru osi x
F_y	sila u smjeru osi y
I_y	moment tromosti oko osi y (može biti i neka druga os)
M_A	moment oko točke A (može biti bilo koja oznaka točke)
M_y	moment oko osi y (može biti i neka druga os)
N_x	uzdužna sila u smjeru osi x (može biti i neka druga os)
P_y	sila u smjeru osi y , a može biti i varijacija neke druge osi
R_y	rezultanta u smjeru osi y
S_y	statički moment površine u odnosu na os y (može biti i neka druga os)
V_y	poprečna sila u smjeru osi y
W_y	moment otpora oko osi y (može biti i neka druga os)
a_x	udaljenost ili duljina u smjeru osi x
$b_{\min}$	najmanja dimenzija pravokutnog presjeka
c_{pe}	koeficijent vanjskog tlaka
c_{pi}	koeficijent unutarnjeg tlaka
e_x	ekscentricitet sile u smjeru osi x
$e_{\min}$	najmanji ekscentricitet uzdužne sile
$e_{\max}$	najveći ekscentricitet uzdužne sile
f_{ctd}	proračunska osna vlačna čvrstoća betona (centrični vlak)
f_c	tlačna čvrstoća
f_t	vlačna čvrstoća
f_v	posmična čvrstoća
f_y	granica popuštanja čelika za armiranje
i_y	polumjer tromosti oko osi y (može biti i neka druga os)
$i_{\min}$	minimalni polumjer tromosti
l_i	svijetli otvor između oslonaca
$q_p(z_e)$	vanjski najveći tlak (opterećenje) zbog brzine vjetra
s_k	karakteristična opterećenja snijegom
y_d	udaljenost po y osi od težišta do donjeg ruba presjeka
y_g	udaljenost po y osi od težišta do gornjeg ruba presjeka
w_e	vanjski tlak vjetra
w_i	unutarnji tlak vjetra
z_e	referentna visina vanjskog tlaka vjetra

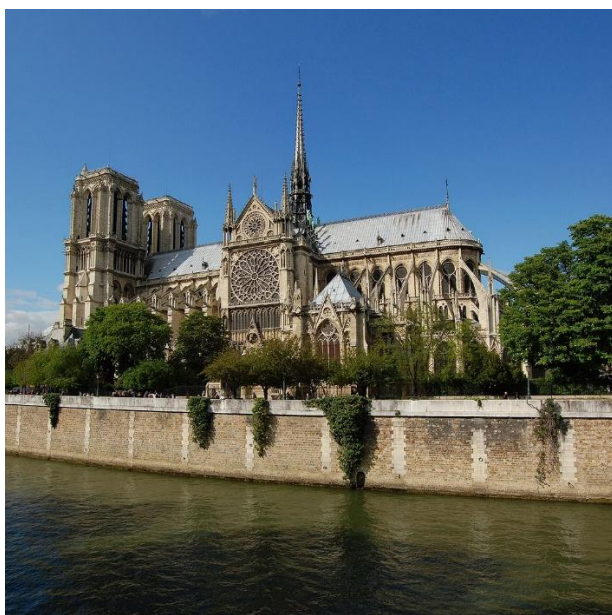
1. Uvod

1.1. Što smatramo nosivom konstrukcijom?

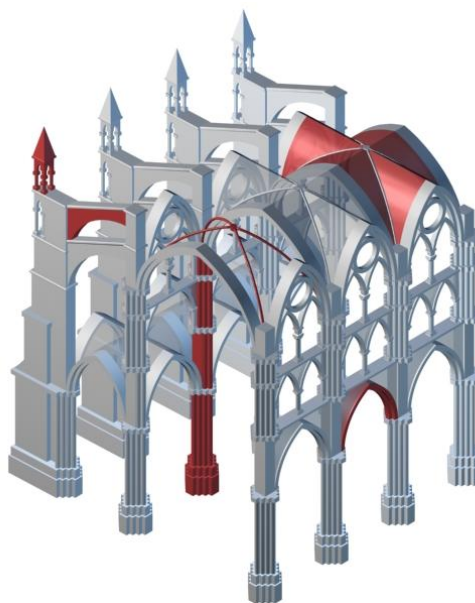
Nosiva konstrukcija oduvijek je bila ključna komponenta arhitekture. Pomoću odabranih materijala oblikuje se sklop nosivih elemenata čija je zadaća da tijekom eksploatacije odolijeva svim mogućim opterećenjima. Taj sustav elemenata naziva se *nosiva konstrukcija*, a pod djelovanjem opterećenja ona mora zadržati prostornu stabilnost i osigurati prijenos sila do temelja i tla na kojemu se oslanja.

Iako je osiguranje stabilnosti i nosivosti primarni cilj svakog konstrukcijskog projekta, to nije i njegova jedina svrha: konstrukcija, u većoj ili manjoj mjeri, utječe na arhitektonsko oblikovanje prostora. Stoga je interakcija arhitektonskog i konstruktorskog promišljanja neizbježna.

Primjerice, kada su srednjovjekovni graditelji crkava pronašli način kako križno-rebrastim svodom prenijeti opterećenje svodne konstrukcije u četiri ugla (umjesto linijski duž dviju strana bačvastog svoda), otvorila su se nova arhitektonska rješenja: crkveni brodovi više nisu morali biti odijeljeni masivnim zidovima, već nizom elegantnih stupova. Budući da su zidovi dotad osiguravali i potrebnu stabilnost na bočne potiske svoda, bilo je nužno dodatno ojačati stupove: konstrukcijski zahtjev dobio je arhitektonsko rješenje u obliku kontrafora, koji su zajedno s križno-rebrastim svodom postali prepoznatljiv i neizostavan element gotičkog stila.



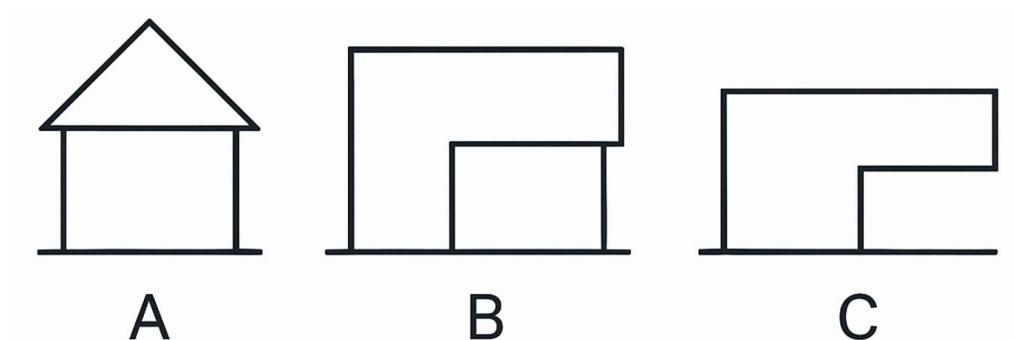
a) Fotografija – izgled katedrale



b) Model dijela nosive konstrukcije katedrale

Slika 1.1. Katedrala Notre-Dame de Paris (izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/Notre-Dame_de_Paris)

Doprinos nosive konstrukcije ukupnom arhitektonskom oblikovanju uvelike ovisi o arhitektonskom konceptu i oblikovanju (slika 1.2.). Jasno je da će u slučaju građevine označene slovom A na slici 1.2. projekt konstrukcije biti gotovo isključivo usmjeren na nosivost i stabilnost, dok će u slučajevima građevina na slici 1.2. označenih slovima B i C zahtjevi stabilnosti i nosivosti imati izraženiji utjecaj na njihovu arhitektonsku pojavnost.



Slika 1.2. Arhitektonsko oblikovanje građevina s manjim (A) ili većim (B i C) utjecajem nosive konstrukcije na oblikovanje i izgled građevine

Razvoj čeličnih i armiranobetonskih konstrukcija početkom 20. stoljeća potaknuo je mnoge arhitekte da konstrukciju tretiraju kao glavni oblikovni element. Konstruktivizam – pravac koji se javlja između dvaju svjetskih ratova – naglašava funkcionalnost konstrukcije, izražajnost konstruktivnih elemenata i novih materijala poput čelika i armiranog betona (slika 1.3.).



a) Zgrada državne industrije Gosprom u Moskvi, Sergei Serafimov, 1928. g.



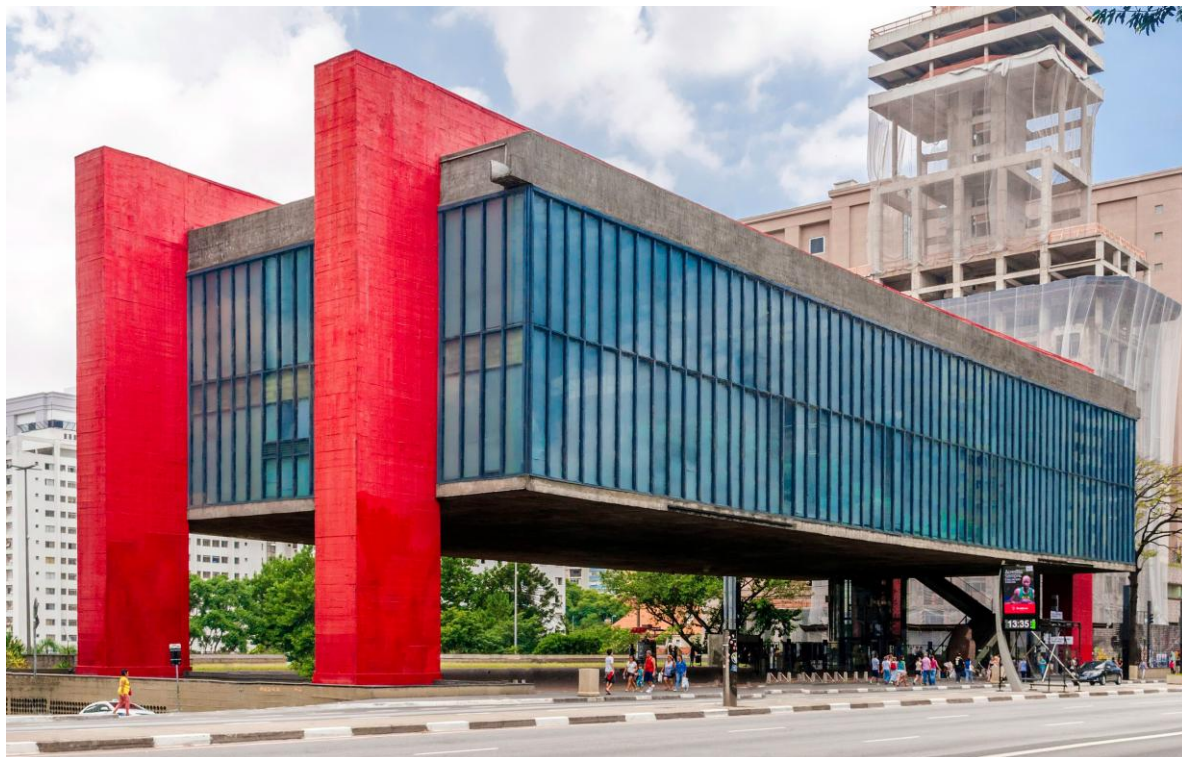
b) Zgrada Narkomfin u Moskvi, Moisei Ginzburg i Ignaty Milinis, 1930. g.

Slika 1.3. Primjeri zgrada iz perioda konstruktivizma (izvor: <https://architecture-history.org>)

Brutalizam, stil koji se pojavljuje 1960-ih, promovira beton kao dekorativni element, ističući vrijednost njegove prirodne, neobložene strukture i ostavljajući konstrukciju vidljivom (slika 1.4.). Tijekom 1970-ih, nadovezujući se na brutalizam, razvija se *high-tech* arhitektura (strukturnalni ekspresionizam), koja još izraženije ističe konstruktivni sustav kao oblikovni element (slika 1.5.).



a) Chandigarh Capitol Complex, Le Corbusier, 1952. g.



b) Muzej umjetnosti u Sao Paulu (MASP), Lina Bo Bardi, 1968.g.

Slika 1.4. Primjeri zgrada iz perioda brutalizma (izvor: <https://architecture-history.org>)



Slika 1.5. *Primjer iz perioda strukturalnog ekspresionizma: Olimpijski stadion u Munchenu, Gunther Behnisch i Frei Otto, 1972. g.*(izvor: <https://hr.wikipedia.org>)

Brojni elementi i ideje strukturalnog ekspresionizma vidljivi su i danas u izvedenicama tog smjera u suvremenoj arhitekturi (slika 1.6.).



Slika 1.6. *Primjer suvremenih zgrada s vidljivom konstrukcijom kao bitnim oblikovnim elementom: Sendai Mediaheque, Toyo Ito, 2001. g.*(izvor: <https://medium.com>)

1.2. Materijali

Oblikovanje konstrukcije ili njezinih detalja mora biti usklađeno s bitnim karakteristikama materijala od kojeg se izvodi. Osnovni građevinski materijali danas su beton, čelik, opeka i drvo, no sve su češći primjeri konstrukcija izvedenih i od stakla, aluminija i različitih kompozitnih materijala.

Zide predstavlja kombinaciju zidnog elementa i veziva, najčešće morta. Zidni element tradicionalno je bio kamen ili opeka, dok se danas najčešće rabi blok opeka. Blokovi mogu biti i betonski, odnosno izrađeni od lakših betonskih materijala poput plinobetona ili pjenobetona. Zidane konstrukcije odlikuju se umjerenom tlačnom čvrstoćom, dobrim fizikalnim svojstvima i visokom otpornošću na požar. Međutim, imaju relativno malu duktilnost (žilavost, tj. omjer između deformacije sloma i deformacije popuštanja) te nisku vlačnu čvrstoću.



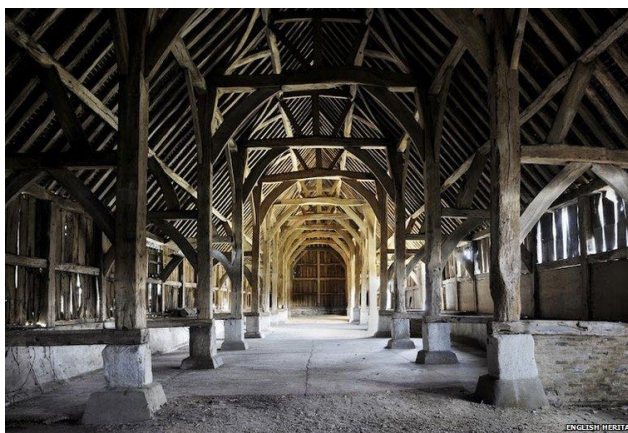
a) Kapela Krista Radnika i Gospe Lurdske u Atlantidi u Urugvaju, Eladio Dieste, 1960. g.



b) Rimski akvadukt Pont du Gard pored Nimesa iz 1. stoljeća poslije Krista

Slika 1.7. Primjeri građevina s nosivom konstrukcijom od zida (izvor: <https://hr.wikipedia.org>)

Drvo je konstrukcijski materijal sličnih svojstava u vlačnom i tlačnom smislu, koja pritom ovise o smjeru opterećenja. Zbog relativno male čvrstoće i ograničenih dimenzija dostupnih elemenata tradicionalne drvene konstrukcije imaju manji raspon. Razvojem suvremenih lijepljenih (lameliranih) drvenih elemenata taj je problem uspješno riješen. Drvo ima umjerenu duktilnost, zadovoljavajuću otpornost na požar te – zahvaljujući maloj specifičnoj težini – vrlo povoljan odnos čvrstoće i težine.



a) Gospodarska građevina Great Coxwell Tithe Barn u Engleskoj, cistercitski red, 1292. g.



b) Metropol Parasol u Sevilji u Španjolskoj, Jurgen Mayer H., 2011. g.

Slika 1.8. Primjeri građevina s nosivom konstrukcijom od drva (izvor: <https://hr.wikipedia.org>)

Nearmirani beton materijal je s relativno visokom tlačnom, ali vrlo niskom vlačnom čvrstoćom i duktilnošću. U suvremenim betonskim konstrukcijama potrebna vlačna čvrstoća i duktilnost osiguravaju se ugradnjom čelične armature u obliku šipki ili mreža – **armirani beton**. One su obavijene betonskim zaštitnim slojem (tzv. omotačem) koji također pruža odgovarajuću otpornost na požar. Dodatnim prednapinjanjem betona, najčešće užadi i kabelima od visokovrijednog čelika, moguće je značajno poboljšati mehanička svojstva betonskih konstrukcija – **prednapete betonske konstrukcije**.



a) Krov zgrade Unite d'Habitation u Marseilleu, Le Corbusier, 1952. g.



b) Krčki most koji spaja otok Krk s kopnom, Ilija Stojadinović, 1980. g.

Slika 1.8 Primjeri građevina s nosivom konstrukcijom od betona (izvor: <https://hr.wikipedia.org>)

Čelik je konstrukcijski materijal izrazito visoke čvrstoće i duktilnosti, s jednakom nosivošću na tlak i vlak. Zahvaljujući malim dimenzijama potrebnog presjeka, čelične konstrukcije mogu prenositi vrlo velike sile, zbog čega ih se često naziva **laganim konstrukcijama**. Idealan su materijal za izvedbu nosivih konstrukcija velikih raspona. Odgovarajuća otpornost na požar postiže se dodatnim zaštitnim mjerama, kao što su protupožarni premazi ili obloge.



a) Ping An centar u Shenzhen, Kohn Pedersen Fox, 2017. g.



b) Nacionalni stadion „Ptičje gnijezdo“ u Pekingu, Herzog i de Meuron, 2008. g.

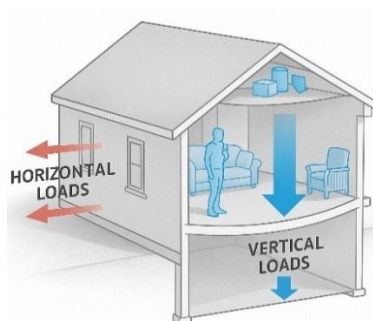
Slika 1.8. Primjeri građevina s nosivom konstrukcijom od čelika (izvor: <https://hr.wikipedia.org>)

1.3. Opterećenja

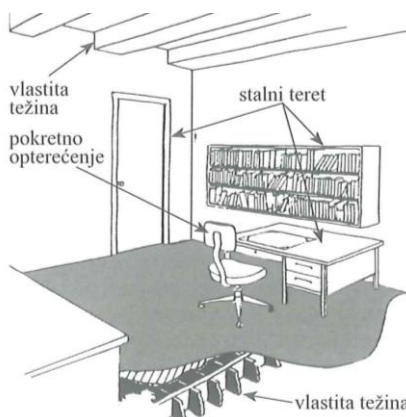
Opterećenjem se nazivaju sva djelovanja na konstrukciju. Djelovanja na konstrukcije nastaju općenito uslijed nekog događaja koji može podrazumijevati prisutnost gravitacije, građenje, izvedbu slojeva i obloga, prisutnost ljudi, padanje snijega na građevinu, prolaz vozila preko mosta, puhanje vjetrova, promjenu temperature okoliša ili pojavu potresa ili požara. U pravilu, točno određivanje svih djelovanja na konstrukciju prilično je složeno. Stoga su opterećenja na konstrukcije uglavnom jasno određene nacionalnom tehničkom regulativom i nacionalnim normama.

Međutim, bitno je da sva ta djelovanja, odnosno opterećenja, definiramo kao vanjske sile koje djeluju na konstrukciju. Pri tome ih uglavnom dijelimo na sljedeći način:

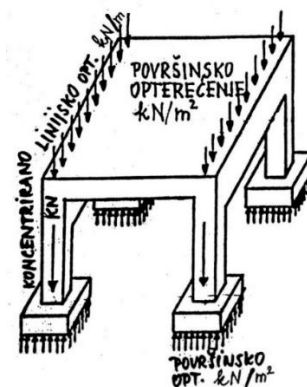
- po smjeru djelovanja: **vertikalna i horizontalna** opterećenja
- po duljini trajanja na konstrukciju: **stalna, promjenjiva (pokretna) i izvanredna** opterećenja
- po načinu prijenosa na konstrukciju: **kontinuirana i koncentrirana** opterećenja.



a) Vertikalna i horizontalna opterećenja



b) Stalna i promjenjiva (pokretna) opterećenja



c) Kontinuirana (linijsko i površinsko) i koncentrirana opterećenja

Slika 1.9. Uobičajena podjela opterećenja na nosivu konstrukciju

1.3.1. Stalno opterećenje

Osnovno je i najvažnije stalno opterećenje **vlastita težina konstrukcije**. Vlastita težina građevinskih elemenata razvrstava se kao stalno djelovanje, ali i kao nepomično i nepromjenjivo opterećenje. Ona je uvijek ograničavajući faktor za postizanje najvećih mogućih raspona.

Dodatnim stalnim opterećenjem smatra se težina svih arhitektonskih elemenata koji određuju prostor, a nisu dio nosive konstrukcije. Pri tome se misli na: težinu svih slojeva na podovima, zidovima, pročeljima i na krovu, težinu pregradnih zidova te vanjske i unutrašnje stolarije/bravarije.

Vlastita težina konstrukcije, slojeva i opreme proračunava se na osnovu dimenzija i zapreminskih težina. Stoga se stalno opterećenje od vlastite težine konstrukcije i ostalih sastavnica računa preko izraza:

$$\text{- ukupna težina:} \quad G \text{ (kN)} = \gamma \text{ (kN/m}^3\text{)} \cdot V \text{ (m}^3\text{)} \quad (1.1.)$$

$$\text{- linijsko opterećenje od vl. težine:} \quad g \text{ (kN/m)} = \gamma \text{ (kN/m}^3\text{)} \cdot A \text{ (m}^2\text{)} \quad (1.2.)$$

$$\text{- plošno stalno opterećenje od vl. težine:} \quad g \text{ (kN/m}^2\text{)} = \gamma \text{ (kN/m}^3\text{)} \cdot h \text{ (m)} \quad (1.3.)$$

gdje je γ – zapreminska težina materijala; V – zapremina elementa; A – ploština s koje se svodi opterećenje; h – debljina sloja, kao npr. debljina ploče ili estriha i sl.

Primjer određivanja težina nepomičnih strojeva, elektroopreme i obloge ubraja se u vlastitu težinu isto kao i težina zemlje, izolacije ili zastora. Oprema kojoj položaj nije točno definiran u vrijeme projektiranja ili primjerice pomični pregradni zidovi, mogu se u proračunu uzeti kao jednoliko rasprostrto opterećenje. Vrijednosti zamjenskog kontinuiranog opterećenja najbolje se procjenjuju na temelju iskustva, razumnim pristupom projektanta.

1.3.2. Uporabno opterećenje

Osnovno promjenjivo i pokretno opterećenje je ono koje proizlazi iz namjene (uporabe) građevine, pa se stoga naziva **uporabno opterećenje**. Karakteristična vrijednost tog opterećenja, koje se najčešće izražava kao jednoliko kontinuirano opterećenje, određena je propisima (npr. prema HRN normama) i predstavlja očekivanu prosječnu vrijednost u odnosu na funkciju prostora.

Primjeri karakterističnih uporabnih opterećenja:

- stambeni prostori, učionice, bolničke i hotelske sobe:	$q = 2,0 - 3,0 \text{ kN/m}^2$
- uredski prostori:	$q = 2,0 - 3,0 \text{ kN/m}^2$
- prostori za veća okupljanja (kazališta, crkve, muzeji, stadioni...):	$q = 3,0 - 4,0 \text{ kN/m}^2$
- prodajni prostori:	$q = 4,0 - 5,0 \text{ kN/m}^2$

Pored uporabnog opterećenja, promjenjivim opterećenjem nazivaju se i opterećenje snijegom i vjetrom.

1.3.3. Opterećenje snijegom

Opterećenje snijegom promjenjivo je opterećenje koje prvenstveno ovisi o klimatskim uvjetima na mjestu gdje je zgrada i o obliku krovnih ploha zgrade. U planinskim predjelima na većoj nadmorskoj visini u pravilu padne više snijega pa je i opterećenje snijegom na tim lokacijama veće. Također, što je krov zgrade strmiji, manje je zadržavanje snijega nego kada se radi o ravnim krovovima.

Opterećenja snijegom proračunavaju se na osnovi karakterističnog opterećenja s_k , koje odgovara jednolikom snijegu koji je napadao pri mirnim vremenskim uvjetima na ravno tlo. Ova se vrijednost prilagođava ovisno o obliku krova:

$$s = s_k \cdot \mu_i \quad (1.4.)$$

gdje je s_k – karakteristično opterećenje snijegom na tlu koje ovisi o nadmorskoj visini i zemljopisnoj lokaciji (Vidi kartu na slici 1.10. i tablicu 1.1.); μ_i – koeficijent oblika opterećenja snijegom na krovu ovisno o tipu krova (Vidi tablicu 1.2. i sliku 1.10.).

Karakteristično opterećenje snijegom s_k temelji se na kartama snježnih padalina pojedinih država i vezano je uz zemljopisne lokacije. Hrvatska je podijeljena na 4 zone snježnih područja, što je prikazano na slici 1.10.



Slika 1.10. Karta snježnih područja Republike Hrvatske (HRN EN 1991-1-3)

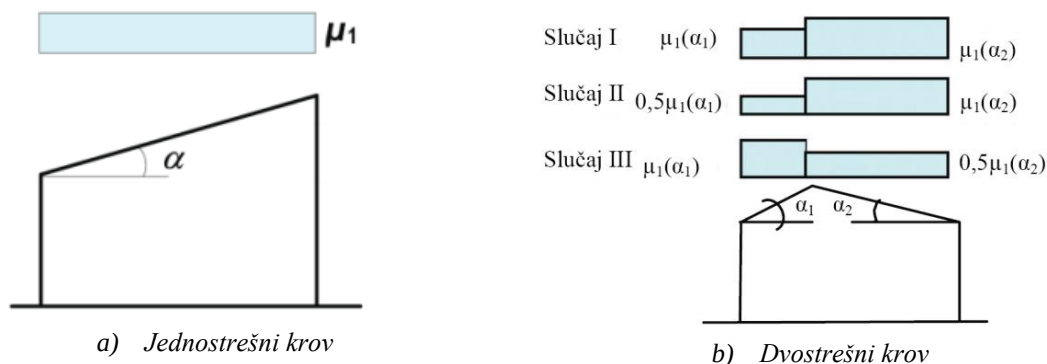
Tablica 1.1. Karakteristično opterećenje snijegom na tlu (HRN EN 1991-1-3)

Nadmorska visina do (m)	1.područje-priobalje i otoci [kN/m ²]	2.područje-zaleđe Dalmacije, Primorja i Istre [kN/m ²]	3.područje-kontinentalna Hrvatska [kN/m ²]	4.područje-gorska Hrvatska [kN/m ²]
100	0,50	0,75	1,00	1,25
200	0,50	0,75	1,25	1,50
300	0,50	0,75	1,50	1,75
400	0,50	1,00	1,75	2,00
500	0,50	1,25	2,00	2,50
600	0,50	1,50	2,25	3,00
700	0,50	2,00	2,50	3,50
800	0,50	2,50	2,75	4,00
900	1,00	3,00	3,00	4,50

Utjecaj geometrije krova uzet je u obzir s koeficijentom oblika opterećenja snijegom μ , u ovisnosti o nagibu krova. Konvencionalni skošeni krovovi, jednostrešni, višestrešni i cilindrični krovovi razmatraju se odvojeno. Koeficijenti oblika opterećenja snijegom dani su u tablici 1.2, a treba ih u proračunu uzeti u skladu sa slikom 1.11.

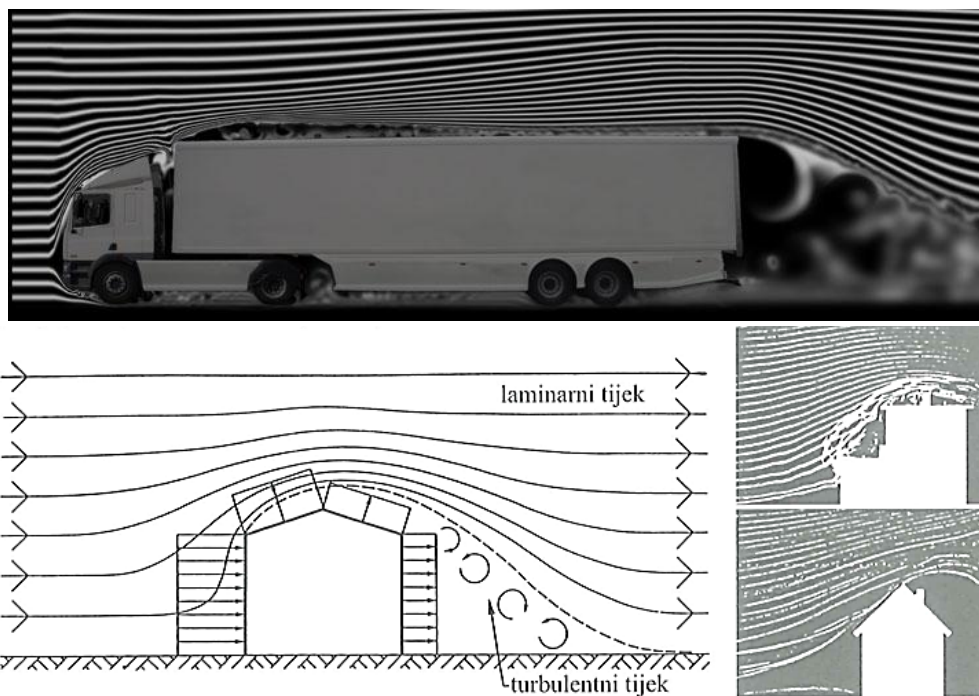
Tablica 1.2. *Koeficijenti oblika opterećenja snijegom (HRN EN 1991-1-3)*

Kut nagiba krova	$0^\circ < \alpha \leq 30^\circ$	$30^\circ < \alpha < 60^\circ$	$\alpha \geq 60^\circ$
Koeficijent oblika μ_1	0,8	$0,8(60 - \alpha)/30$	0,0
Koeficijent oblika μ_2	$0,8 + 0,8\alpha/30$	1,6	-

Slika 1.11. *Koeficijenti oblika opterećenja snijegom (HRN EN 1991-1-3)*

1.3.4. Opterećenje vjetrom

Vjetar je promjenljivo slobodno djelovanje. Djelovanje vjetra na građevinu ovisi o njezinu obliku i brzini vjetra. Očituje se promjenom tlaka u odnosu na normalni atmosferski tlak. Isto se događa kod kamiona koji se vozi cestom – uslijed djelovanja vjetrom na izloženoj se strani javlja predtlak, a na suprotnoj strani i bočnim stranama javlja se usis kako je prikazano na slici 1.12.

Slika 1.12. *Djelovanje vjetra na kamion i zgradu s vidljivom pojavom predtlaka i usisa*

Opterećenje vjetrom razmatra se kao kvazistatički tlak koji djeluje okomito na površinu građevine, osim u posebnim okolnostima kao što su tangencijalne sile trenja uslijed puhanja vjetra preko dugih ravnih površina. Karakteristični tlak vjetra je tlak osnovne brzine vjetra, v_b , koja je za područje Hrvatske određena kartom osnovne brzine danom na slici 1.13.



Slika 1.13. Karta osnovne brzine vjetra za Republiku Hrvatsku (HRN EN 1991-1-4)

Na temelju osnovne brzine vjetra, v_b , odredi se osnovni tlak vjetra preko izraza:

$$q_b = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_b^2 \quad (1.5.)$$

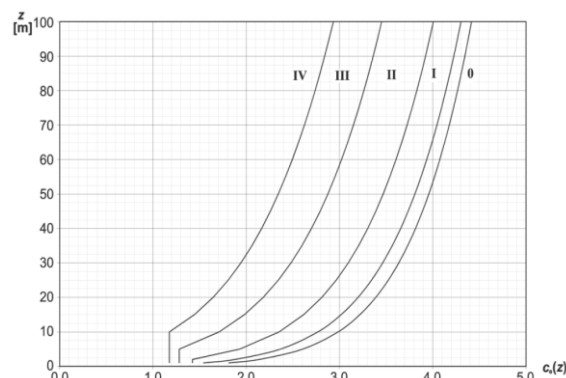
gdje je q_b – osnovni tlak vjetra; ρ – gustoća zraka ($\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$); v_b – osnovna brzina vjetra.

Tlak uslijed brzine vjetra pri udaru vjetra na građevinu na visini z iznosi:

$$q_b(z_e) = c_e(z) \cdot q_b \quad (1.6.)$$

gdje je $q_b(z_e)$ – tlak vjetra uslijed brzine vjetra pri udaru na visini z ; $c_e(z)$ – koeficijent izloženosti koji uzima u obzir neravninu terena, topografiju i visinu iznad tla i određuje se u skladu s tablicom i dijagramom prikazanim na slici 1.14. za promatranu visinu. Kod zgrada obično se promatra maksimalna visina građevine h , tj. vrijedi: $z = z_e = h$.

Kategorija terena	Karakteristike terena
0	more i površine obale
I	jezera-nema zapreka
II	slaba vegetacija – pojedine zapreke s razmakom najmanje 20x visine zapreke
III	normalna vegetacija
IV	najmanje 15% površine pokriveno je zgradama prosječne visine 15 m

Slika 1.14. Kategorije terena na kojem je građevina i dijagram za očitavanje koeficijenta izloženosti $c_e(z)$ prema HRN EN 1991-1-4

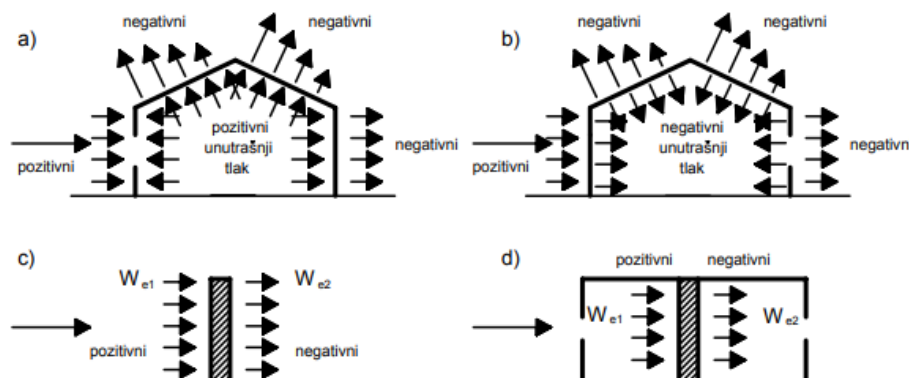
Tlak vjetra na vanjske površine w_e i tlak vjetra na unutrašnje površine w_i proračunava se po izrazima:

$$\text{vanjski tlak:} \quad w_e = c_{pe} \cdot q_b(z_e) = c_{pe} \cdot c_e(z) \cdot q_b \quad (1.6.)$$

$$\text{unutrašnji tlak:} \quad w_i = c_{pi} \cdot q_b(z_e) = c_{pi} \cdot c_e(z) \cdot q_b \quad (1.7.)$$

gdje je w_e – tlak vjetra na vanjsku površinu elementa građevine; w_i – tlak vjetra na unutrašnju površinu elementa građevine; c_{pe} – koeficijent vanjskog tlaka koji ovisi o dimenzijama građevine i položaju elementa koji se razmatra; c_{pi} – koeficijent unutrašnjeg tlaka koji ovisi o raspodjeli i veličini otvora po oplošju građevine.

Neto pritisak na površinu algebarski je zbroj unutrašnjeg i vanjskog pritiska u skladu sa slikom 1.15.



Slika 1.15. Tlak vjetra (vanjski i unutrašnji) na pojedine površine zgrade/zida

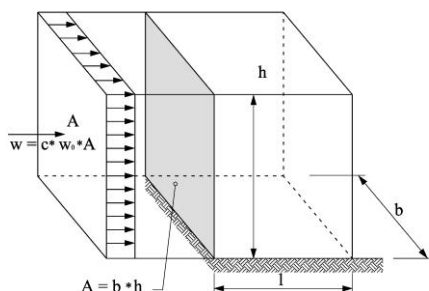
Proračun pritiska vjetra na zidove uobičajenih građevina izrazito je složen i zahtjevan. Za približne proračune u pravilu je potrebno imati ukupni pritisak vjetra W na neku plohu ploštine A u skladu sa slikom 1.16. Za područje kontinentalne Hrvatske osnovna brzina vjetra je $v_{b,0} \leq 25$ m/s, a za veći dio priobalnog područja je $v_{b,0} \leq 35$ m/s. Stoga su za zgrade ukupne visine $h \leq 10$ m i kategoriju terena III, koja odgovara naseljenim mjestima, vrijednosti unutarnjeg i vanjskog tlaka dane u tablici 1.3.

Tablica 1.3 Tlakovi vjetra na vertikalne vanjske zidove građevina visine $h \leq 10$ m

Područje	Vanjski tlak vjetra (1)	Unutrašnji tlak vjetra (2)	Ukupni tlak (1) + (2)
Kontinentalna Hrvatska	$w_e = c_{pe} \cdot q_b(h) = 0,8 \cdot 0,66$ $w_e \approx 0,55 \text{ kN/m}^2$	$w_i = c_{pi} \cdot q_b(h) = 0,3 \cdot 0,66$ $w_i = 0,20 \text{ kN/m}^2$	$w = (c_{pe} + c_{pi}) \cdot q_b(h)$ $w \approx 0,75 \text{ kN/m}^2$
Priobalna Hrvatska	$w_e = c_{pe} \cdot q_b(h) = 0,8 \cdot 1,30$ $w_e = 1,05 \text{ kN/m}^2$	$w_i = c_{pi} \cdot q_b(h) = 0,3 \cdot 1,30$ $w_i = 0,40 \text{ kN/m}^2$	$w = (c_{pe} + c_{pi}) \cdot q_b(h)$ $w = 1,45 \text{ kN/m}^2$

Vrijednosti tlakova danih u tablici 1.3. mogu se rabiti za približne proračune tlaka vjetra na vertikalne plohe građevine. Ukupna vrijednost tlaka na nekoj ploštini W dobije se umnoškom ukupnog plošnog tlaka vjetra w i ploštine A na koju djeluje, tj. preko izraza:

$$W = w \cdot A \quad (1.8.)$$

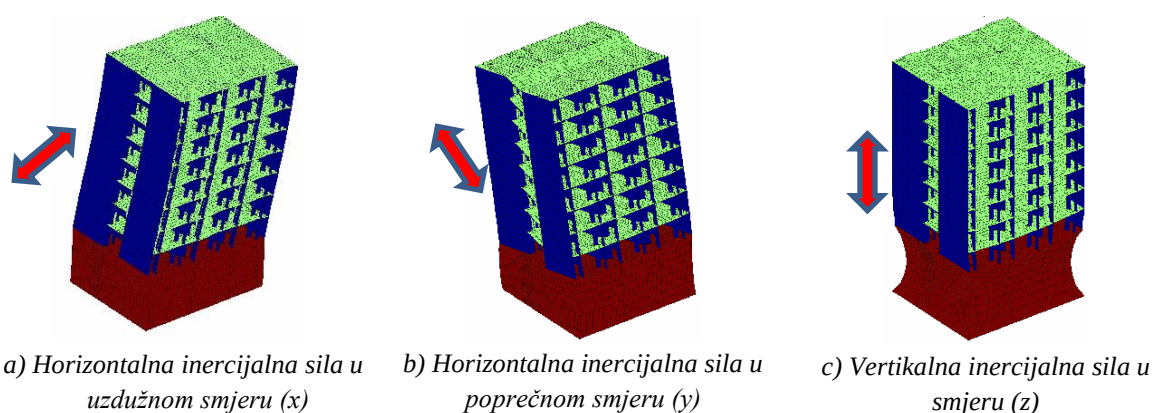


Slika 1.16. Ukupni tlak vjetra na vertikalnu površinu zida ploštine $A = b \cdot h$

1.3.5. Potresno (seizmičko) opterećenje

Posebnu grupu opterećenja čine tzv. izvanredna opterećenja: opterećenje potresom i požarom.

Potres se razmatra kao fenomen velike količine energije i vrlo je kratkog trajanja. Djelovanje potresa dinamička je pojava koja rezultira tako da na građevine djeluju inercijalne sile uzrokovane gibanjem tla zbog seizmičkih valova. Seizmičko djelovanje obično se predstavlja pomoću tri komponente inercijalnih sila (dvjema horizontalnima i jednom vertikalnom komponentom kao što je prikazano na slici 1.17. Pri tome su horizontalne vibracije znatno opasnije od vertikalnih jer su sve konstrukcije ionako dimenzionirane na vertikalno opterećenje. Horizontalno vibriranje s ubrzanjem od $0,2 \cdot g$ iznosi 20% vertikalnog opterećenja. Takvo ubrzanje u horizontalnom smjeru izaziva velike poprečne sile i momente savijanja u konstrukciji koji, ako nisu uzeti u obzir, mogu dovesti do urušavanja ili prevrtanja građevine (slika 1.18.).



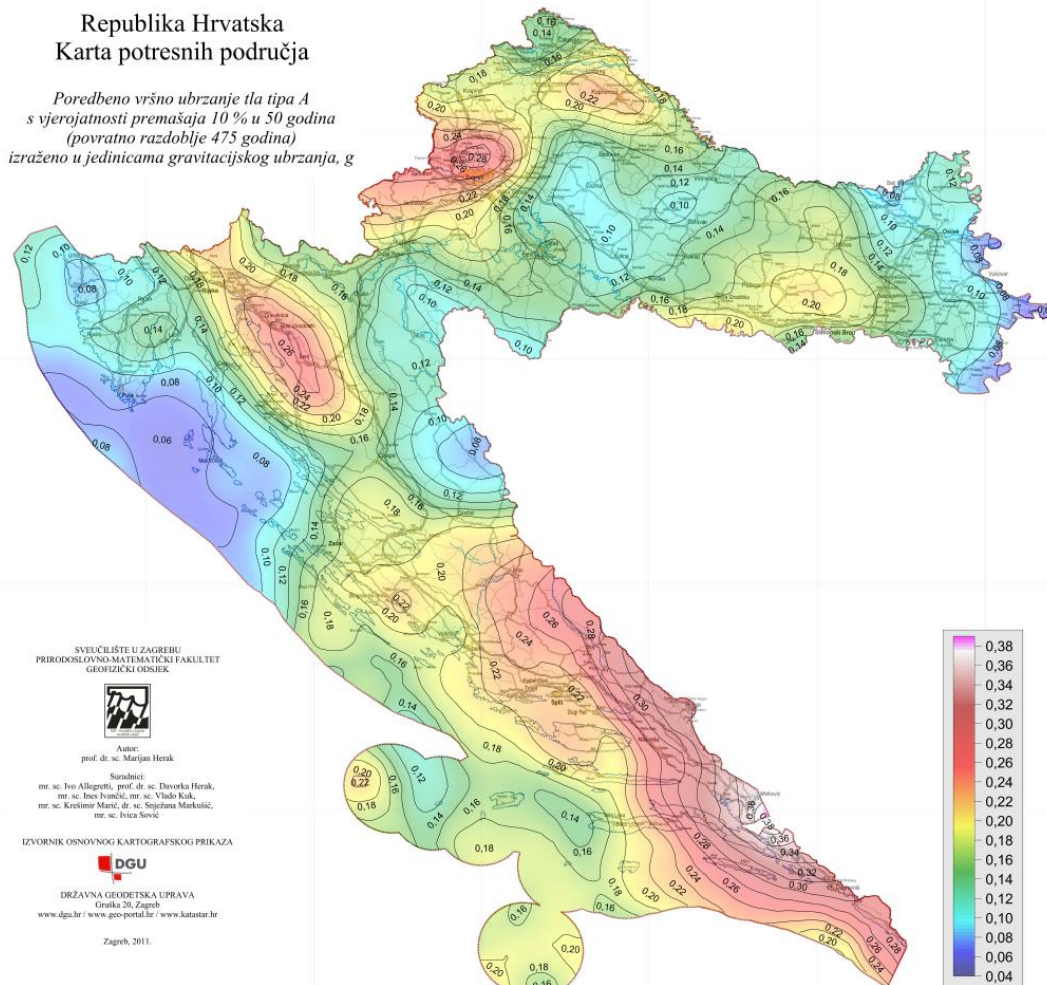
Slika 1.17. Komponente inercijalnih sila na građevinu uslijed potresa



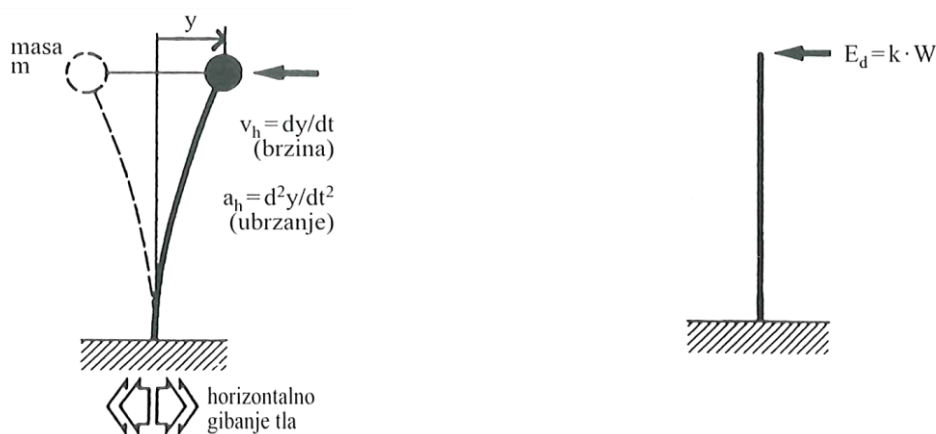
Slika 1.18. Fotografija urušavanja građevina uslijed djelovanja potresa

Seizmičko djelovanje određuje se preko proračunskog ubrzanja tla a_g koje odgovara povratnom periodu potresa od 475 godina. Proračunska ubrzanja tla za prostor Hrvatske dana su državnim propisom i prikazana su na slici 1.19. Područja s ubrzanjem $a_g \leq 0,05 \cdot g$ područja su malog intenziteta. U slučaju $a_g \leq 0,02 \cdot g$ proračun na potres nije potreban.

Fenomen djelovanja potresa dosta je kompleksan kao i njegov stvarni utjecaj na građevinu zbog nelinearnog ponašanja građevina, odnosno nosivih konstrukcija. Statičke seizmičke sile djelovanja potresa na koje proračunavamo građevinu izvedene su iz inercijalnih sila koje nastaju uslijed seizmičke pobude građevine (slika 1.20.). Inercijalne sile odgovaraju intenzitetu pobude, vlastitim periodima konstrukcije, masi građevine, kao i njezinu duktilnom ponašanju.



Slika 1.19. Karta potresnih područja Republike Hrvatske (HRN EN 1998-1)



Slika 1.20. Stvarna dinamička pojava u potresu (lijevo) i zamjenjujuće statičko opterećenje (desno)

Međutim, pojednostavljeno, ukupna horizontalna seizmička sila, E_d , uvijek predstavlja neki postotak vertikalnog opterećenja građevine u skladu s izrazom:

$$E_d = k \cdot W \quad (1.9.)$$

gdje je:

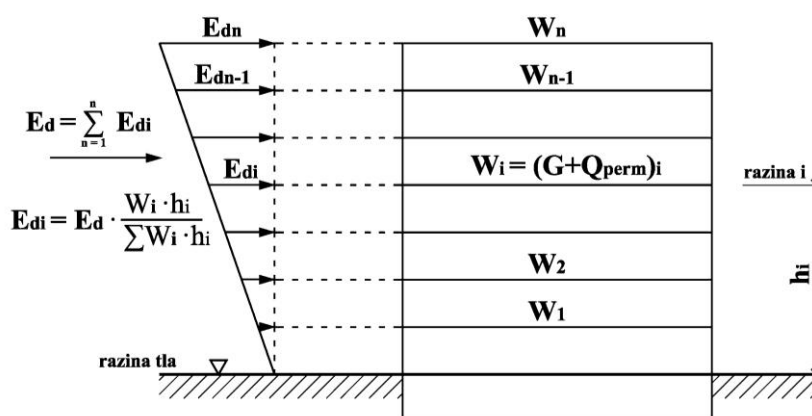
- W – vertikalno opterećenje koje čine stalno opterećenje i odgovarajući dio uporabnog opterećenja ovisno o namjeni zgrade (za stambene i poslovne to je 30 %, a za škole, fakultete i sl. to je 60 %)

- k – seizmički koeficijent postotka težine čija vrijednost ovisi o sljedećem:
 - važnosti građevine, tj. radi li se o stambenoj zgradi, školi, bolnici ili zgradi od posebne važnosti kao što su zgrade telekomunikacija, nuklearne elektrane i sl.
 - projektnoj seizmičnosti lokacije zgrade, tj. o proračunskom ubrzanju tla
 - vrsti tla u kojem se građevina izvodi
 - veličini osnovnog perioda vibracija
 - svojstvu duktilnosti konstrukcije, tj. o njezinoj sposobnosti disipacije energije potresa.

Za područje Zagreba za preliminarni proračun ukupne seizmičke sile uobičajeno seizmički koeficijent postotka težine iznosi:

- za visoke okvirne konstrukcije: $k \approx 0,05 - 0,12$
- za niske okvirne konstrukcije: $k \approx 0,12 - 0,20$
- za visoke zidne konstrukcije: $k \approx 0,05 - 0,20$
- za niske zidne konstrukcije: $k \approx 0,20 - 0,35$.

Također, za preliminarne proračune može se usvojiti trokutasta raspodjela ukupne potresne sile po katovima u skladu sa slikom 3.26.



Slika 3.26. Raspodjela ukupne seizmičke sile E_d po visini zgrade za preliminarni proračun

Za horizontalne sile obično se pretpostavlja da djeluju u razinama stropnih ploča, što je i opravdano jer pretežni dio mase zgrade i pripada stropovima. Međutim, za složenije i visoke građevine nužna je provedba dinamičkog proračuna, tj. modalni proračun primjenom spektra odziva.

1.3.6. Požarno opterećenje

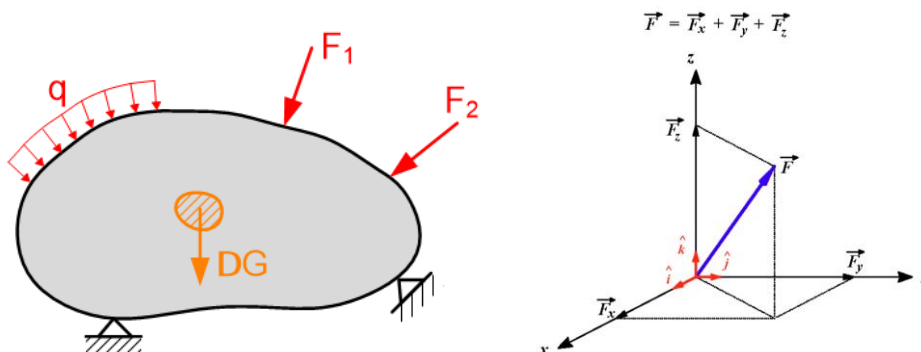
Požar je izvanredno opterećenje koje nastaje iznenadnim i neplaniranim gorenjem raznih tvari (namještaj, obloge pa i konstrukcije) pri čemu se razvijaju visoke temperature. Požarni proračun predviđa proračun konstruktivnih elemenata na utjecaj temperatura koje se mogu razviti u slučaju izbijanja požara. Normirane vrijednosti temperature izrazito su visoke i rijetko koji konstrukcijski element može zadovoljiti požarne zahtjeve (zadržati nosivost 30, 60, 90 ili 120 minuta, ovisno o vrsti građevine) bez protupožarne zaštite ili značajnog povećanja dimenzija. Stoga se uglavnom radi zaštita nosive konstrukcije odgovarajućim premazima, oblogama ili ugradnjom aktivnih sustava gašenja (npr. sprinkler sustav) kako bi u slučaju nastanka visokih temperatura nosiva konstrukcija ostala zaštićena. Realnije rezultate (bitno manje temperature) moguće je dobiti izradom krivulje realnog požara, posebno u slučaju kada je zgrada opremljena protupožarnim sustavima (npr. sprinkler sustav).

2. Sustav sila u ravnini

2.1. Pojam sile

Kao što je ranije navedeno, **opterećenja su sile** koje djeluju na konstrukciju. **Sila je vektorska veličina**, što znači da osim iznosa ima i **pravac** te **smjer** djelovanja. Grafički se prikazuje kao **usmjerena dužina (strelica)**, a vektor sile potpuno je definiran kada su poznati:

- **veličina (intenzitet)** sile
- **pravac** djelovanja
- **smjer** duž pravca (lijevo/desno, gore/dolje)
- opcionalno i **hvatilište** (točka primjene).



Slika 2.1. Prikaz tijela na koje djeluje opterećenje – sile (lijevo) i opći prikaz vektora (desno)

2.2. Centralni sustav sila i rezultanta sustava

U građevnoj statici na neki element konstrukcije najčešće ne djeluje samo jedna sila, već više njih istovremeno. Stoga je u mnogim slučajevima korisno zamijeniti djelovanje više sila jednom silom koja proizvodi isti mehanički učinak kao i sile kojih je ona zbroj. Ta se sila naziva **rezultantom sustava sila**.

Specijalni slučaj opterećenja kada sve sile djeluju na jednu točku konstrukcije, odnosno kada pravci svih sila prolaze istom točkom, naziva se **centralni sustav sila**. Rezultanta tog sustava je **jedna sila koja ima isti učinak kao sve sile zajedno**. Ona će dakako prolaziti istom točkom, a njezinu veličinu određujemo zbrajanjem sila prema pravilu za zbrajanje vektora.

Rezultantu možemo odrediti na dva osnovna načina:

Grafički postupak - crtanje vektora u razmjeru i konstrukcija rezultante pomoću geometrijskih pravila primjenom jednog od triju najčešćih pristupa:

a) Trokut sila

Nacrta se sila A, a zatim iz njezina vrha sila B („vrh na rep“).

Rezultanta je strelica koja zatvara trokut (od početka A do kraja B).

b) Poligon sila

Sve se sile crtaju „vrh na rep“, jedna iza druge.

Rezultanta je vektor koji zatvara poligon – od početka prve sile do kraja posljednje.

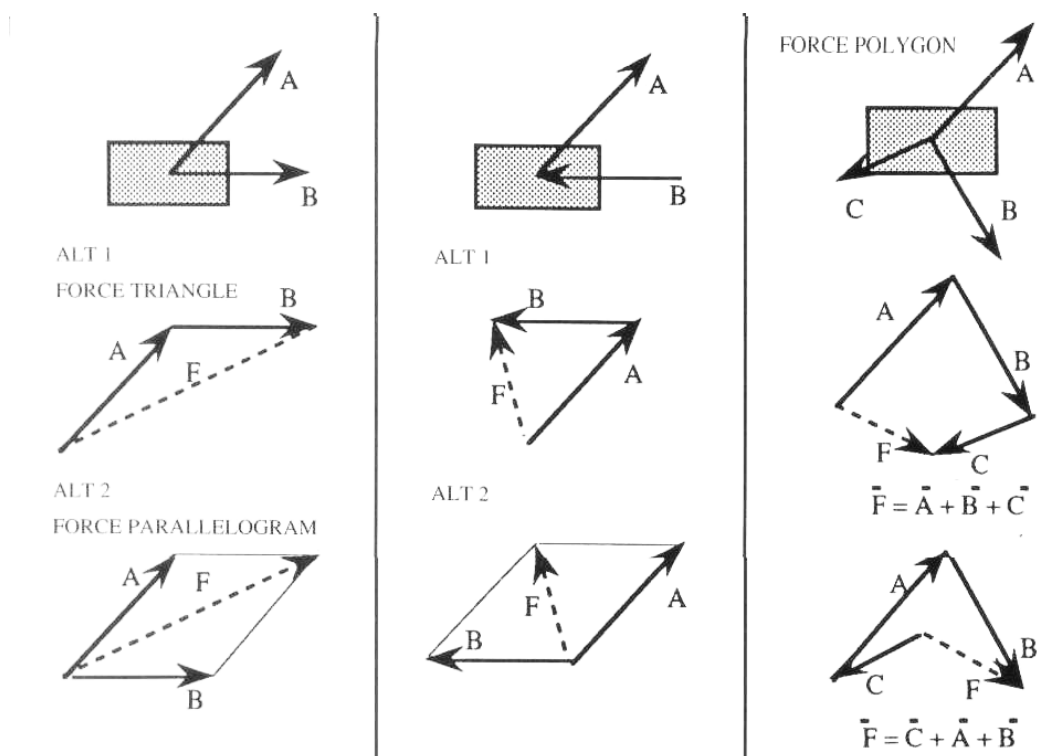
c) Paralelogram sila (samo za dvije sile)

Sile se crtaju iz iste točke.

Konstruira se paralelogram s tim silama kao stranicama.

Dijagonala paralelograma je rezultanta.

Grafički postupak daje **vizualno rješenje** i njime se koristimo za razumijevanje i jednostavne analize.



Slika 2.2. Prikaz centralnog sustava sila i grafičkog određivanja rezultante sustava sila

Pored grafičkog postupka veličina rezultante centralnog sustava sila može se odrediti i **analitičkim postupkom**. Budući da se radi o vektorima, nije ih moguće zbrajati kao obične brojeve (skalarno). Prije zbrajanja potrebno je **rastaviti svaku silu na njezine komponente**.

Općenito vrijedi da se **svaka sila može rastaviti na dvije proizvoljne komponente**, koje predstavljaju **projekcije sile na odabrane osi**. Najčešće se biraju **koordinatne osi x i y**, pa se tada dobivaju:

- **horizontalna komponenta sile**
- **vertikalna komponenta sile.**

Njihove vrijednosti određuju se **trigonometrijskim funkcijama** (kosinus i sinus) na temelju kuta koji sila zatvara s horizontalom.

Koraci su sljedeći:

1. **Rastavi svaku silu** na horizontalnu (x) i vertikalnu (y) komponentu:

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha \quad F_{iy} = F_i \cdot \sin \alpha \quad (2.1.)$$

gdje je: α - kut između sile i horizontalne osi.

2. **Zbroji sve komponente:**

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (2.2.)$$

3. **Izračunaj veličinu rezultante** pomoću Pitagorina poučka:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (2.3.)$$

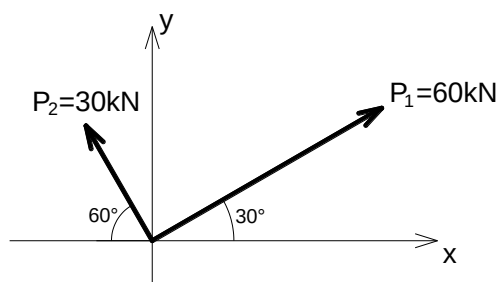
4. **Odredi smjer rezultante** (kut s horizontalom):

$$\tan \theta = R_y / R_x \quad (2.4.)$$

Analitička metoda daje **točne brojčane vrijednosti** i njome se koristimo u inženjerskim proračunima.

Na sljedećim primjerima pokazat će se postupak određivanja rezultante centralnog sustava sila analitičkim i grafičkim postupkom.

2.2.1. Centralni sustav sila – 1. primjer



Na zadanom sustavu treba odrediti rezultantu sila:

- 1) analitičkim postupkom
- 2) grafičkim postupkom.

1) Analitički postupak

Primjenjujemo postupak zbrajanja ortogonalnih komponenta sila.

Najprije rastavimo poznate sile na horizontalne (x) i vertikalne (y) komponente primjenjujući izraze 2.1.:

$$P_1 = 60 \text{ kN}$$

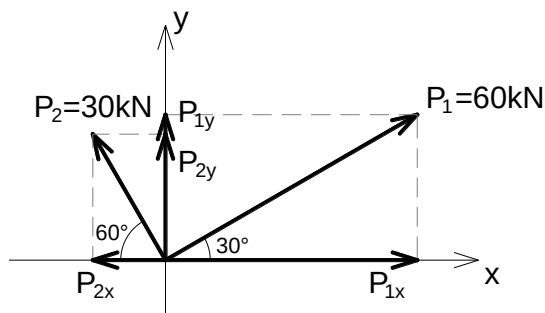
$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos 30^\circ = 52,0 \text{ kN}$$

$$P_{1y} = P_1 \cdot \sin 30^\circ = 30,0 \text{ kN}$$

$$P_2 = 30 \text{ kN}$$

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 15,0 \text{ kN}$$

$$P_{2y} = P_2 \cdot \sin 60^\circ = 26,0 \text{ kN}$$



Zatim zbrojimo komponente za svaki smjer zasebno, poštujući orijentaciju sila, pa primjenom izraza 2.2. dobijemo horizontalnu R_x i vertikalnu R_y komponentu rezultante R .

$$R_x = P_{1x} - P_{2x} = 52 - 15 = 37,0 \text{ kN}$$

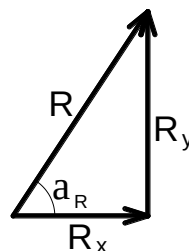
$$R_y = P_{1y} + P_{2y} = 30 + 26 = 56,0 \text{ kN}$$

Konačni iznos rezultante R dobijemo primjenjujući Pitagorin poučak, a kut pod kojim djeluje α_R proizlazi iz omjera komponenti rezultante.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 67,1 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha_R = R_y / R_x = 56 / 37 = 1,514$$

$$\alpha_R = 56,5^\circ$$

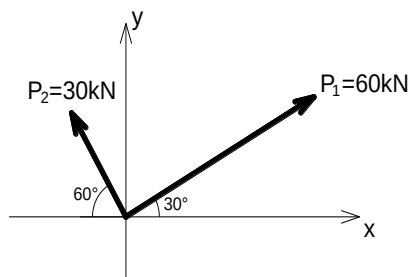


2) Grafički postupak

Određivanje rezultante grafičkim postupkom započinje prikazom sila na planu sila, pri čemu moramo precizno prikazati pravce na kojima sile djeluju. Ako paralelogram sila, odnosno poligon sila radimo na izdvojenim crtežima, tada dužina strelice na planu sila ne mora prikazivati iznos sile koju prikazuje. U svakom slučaju prije idućeg koraka moramo definirati mjerilo kojim prikazujemo sile na crtežu.

Plan sila:

MJ: 1 cm :: 10 kN



Nakon toga radimo paralelogram ili poligon sila.

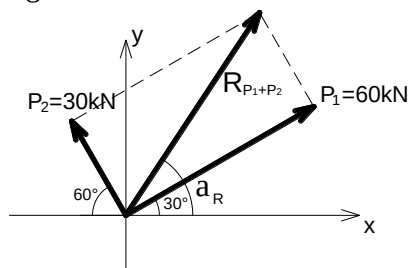
Paralelogram sila možemo primijeniti kada imamo samo dvije sile, a može se crtati direktno na planu sila ili na izdvojenom nacrtu. U paralelogramu sile prikazujemo vektorima dužine sukladno veličini sila i definiranim mjerilom. Odabrano mjerilo definira da je 1 cm na papiru istovjetan veličini sile od 10 kN, stoga za sile P_1 i P_2 proizlaze dužine vektora:

$$P_1 = 60 \text{ kN} \rightarrow 6,0 \text{ cm}$$

$$P_2 = 30 \text{ kN} \rightarrow 3,0 \text{ cm}$$

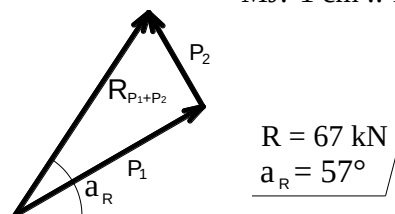
Postupak određivanja rezultante svodi se na zakon paralelograma, pa je rezultanta vektor koji spaja početak (sjecište) sila P_1 i P_2 i nasuprotni vrh nastalog paralelograma.

Paralelogram sila:



Poligon sila:

MJ: 1 cm :: 10 kN



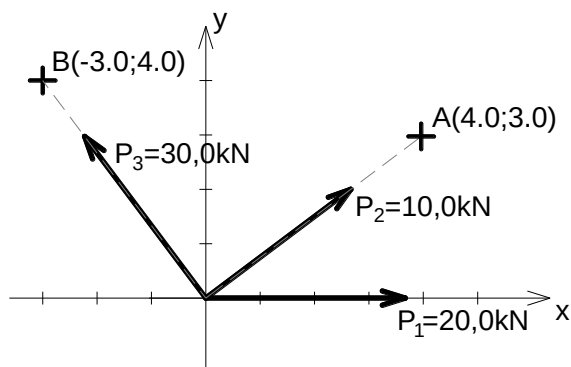
$$R = 67 \text{ kN}$$

$$\alpha_R = 57^\circ$$

Poligonom sila možemo se koristiti bez obzira na broj sila, no moramo crtati izdvojeni nacrt. U poligonu sila nanosimo vektore prenoseći paralele iz plana sila (koristeći se dvama trokutima), crtajući vektore dužine sukladne veličini sila i definiranim mjerilom. Dužine vektora određujemo isto kao i kod paralelograma sila, a sile nanosimo jednu za drugom, tako da svaka iduća sila kreće iz vrha prethodno nacrtane sile. Konačna rezultanta spaja početnu točku prve sile (vektora) i vrh posljednje sile (vektora).

Na kraju bilo koje od primijenjenih metoda očitamo dužinu rezultante od 6,7 cm, temeljem mjerila preračunamo u iznos sile $R_{P_1+P_2} = 67 \text{ kN}$ i kutomjerom očitamo kut $\alpha_R = 57^\circ$ koji rezultanta R zatvara s horizontalom.

2.2.2. Centralni sustav sila – 2. primjer



Zadan je plan sila.

Potrebno je odrediti rezultantu sila grafičkim postupkom.

U poligonu sila nanosimo vektore prenoseći paralele iz plana sila (koristeći se dvama trokutima), crtajući vektore dužine sukladne veličini sila i definiranim mjerilom. Odabrano mjerilo definira da je 1 cm na papiru istovjetan veličini sile od 5 kN, stoga za sile P_1 , P_2 i P_3 proizlaze dužine vektora kako slijedi.

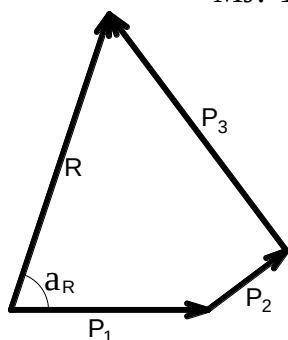
$$P_1 = 20 \text{ kN} \rightarrow 4,0 \text{ cm}$$

$$P_2 = 10 \text{ kN} \rightarrow 2,0 \text{ cm}$$

$$P_3 = 30 \text{ kN} \rightarrow 6,0 \text{ cm}$$

Poligon sila:

MJ: 1 cm :: 5 kN



$$R = 32 \text{ kN}$$

$$\alpha_R = 71^\circ$$

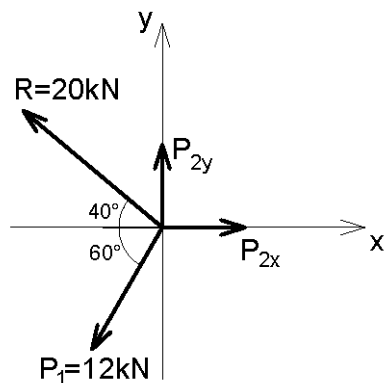
Sile nanosimo jednu za drugom, tako da svaka iduća sila kreće iz vrha prethodno nacrtane sile. Konačna rezultanta spaja početnu točku prve sile (vektora) i vrh posljednje sile (vektora).

Na kraju očitamo dužinu rezultante i pomoću mjerila preračunamo u veličinu sile te kutomjerom očitamo kut α_R koji rezultanta R zatvara s horizontalom:

$$R = 6,4 \cdot 5 = 32 \text{ kN}$$

$$\alpha_R = 71^\circ.$$

2.2.3. Centralni sustav sila – 3. primjer



Zadana je sila P_1 i rezultanta R .

$P_1 = 12 \text{ kN}$, $\alpha_1 = 60^\circ$, III kv

$R = 20 \text{ kN}$, $\alpha_R = 40^\circ$, II kv

Potrebno je analitičkim i grafičkim postupkom odrediti silu P_2 , koja sa silom P_1 daje rezultantu R .

$P_2 = ?$, $\alpha_2 = ?$

1) Analitički postupak

Najprije pretpostavimo komponente sile P_2 , orijentirane u skladu s koordinatnim osima.

Znamo da je rezultanta vektorski zbroj sila

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2,$$

odnosno prema izrazima 2.2.:

$$R_x = P_{1x} + P_{2x}$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y}.$$

U kombinaciji s izrazima 2.1., uz poštivanje orijentacije sila u odnosu na koordinatne osi x i y , dobijemo:

$$-R_x = -P_{1x} + P_{2x}$$

$$-R \cdot \cos 40^\circ = -P_1 \cdot \cos 60^\circ + P_{2x}$$

$$-20 \cdot 0,766 = -12 \cdot 0,5 + P_{2x}$$

$$P_{2x} = -9,32 \text{ kN}$$

$$R_y = -P_{1y} + P_{2y}$$

$$R \cdot \sin 40^\circ = -P_1 \cdot \sin 60^\circ + P_{2y}$$

$$20 \cdot 0,643 = -12 \cdot 0,866 + P_{2y}$$

$$P_{2y} = 23,25 \text{ kN}.$$

Konačni iznos sile P_2 dobijemo primjenjujući Pitagorin poučak, a kut pod kojim djeluje α_2 proizlazi iz omjera komponenti sile:

$$P_2 = \sqrt{P_{2x}^2 + P_{2y}^2} = 25,05 \text{ kN}$$

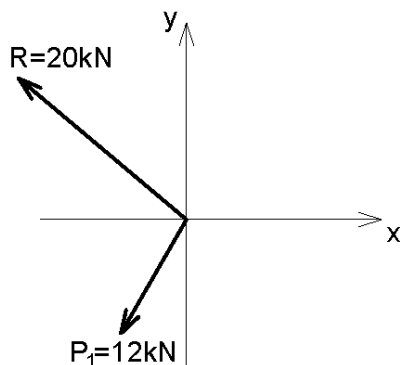
$$\tan \alpha_2 = \frac{P_{2y}}{P_{2x}} = \frac{23,25}{-9,32} = -2,495$$

$$\alpha_2 = 68,2^\circ \quad \text{II kv}$$

$$= 180 - 68,2 = 111,8^\circ.$$

2) Grafički postupak

Plan sila:



Grafički postupak radimo primjenom poligona sila, u koji nanosimo poznate sile P_1 i R . Sile crtamo kao vektore prenoseći paralele iz plana sila (koristeći se dvama trokutima), crtajući vektore dužine sukladne veličini sila i definiranim mjerilom.

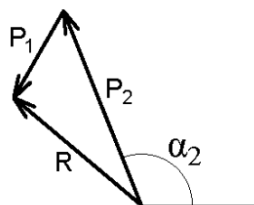
Odabrano mjerilo definira da je 1 cm na crtežu istovjetan veličini sile od 5 kN, stoga za sile P_1 i R proizlaze dužine vektora kako slijedi.

$$P_1 = 12 \text{ kN} \rightarrow 2,4 \text{ cm}$$

$$R = 20 \text{ kN} \rightarrow 4,0 \text{ cm}$$

Poligon sila:

$$\text{MJ: } 1 \text{ cm} :: 5 \text{ kN}$$



Sjetimo se da sile P_1 i P_2 moramo nacrtati u poligonu sila tako da svaka iduća sila kreće iz vrha prethodno nacrtane sile, a rezultanta mora spojiti početnu točku prve sile i vrh posljednje sile. Stoga nacrtamo poznate sile P_1 i R tako da su orijentirane u isti vrh, da bismo zatim silom P_2 zatvorili poligon sila poštujući ranije navedeno.

Na kraju očitamo dužinu sile P_2 i pomoću mjerila preračunamo u veličinu sile te kutomjerom očitamo kut α_2 koji sila zatvara s horizontalom:

$$P_2 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ kN}$$

$$\alpha_2 = 112^\circ$$

2.3. Opći sustav sila i rezultanta sustava

U slučaju **centralnog sustava sila** pravac djelovanja rezultatne sile **prolazi kroz zajedničku (centralnu) točku** u kojoj se sijeku svi pravci djelovanja pojedinačnih sila.

Međutim, ako u ravnini imamo **više od dviju sila koje ne prolaze istom točkom** (što je najčešći slučaj u praksi), govorimo o **općem sustavu sila**. U tom slučaju **veličinu rezultante** i dalje možemo odrediti **vektorskim zbrojem**, ali **položaj njezina pravca djelovanja** (tj. točno gdje prolazi rezultanta) **nije odmah poznat**. Rješenje problema moguće je na nekoliko načina:

a) Postupno određivanje rezultante – parcijalnim zbrajanjem

Problem možemo riješiti postupno:

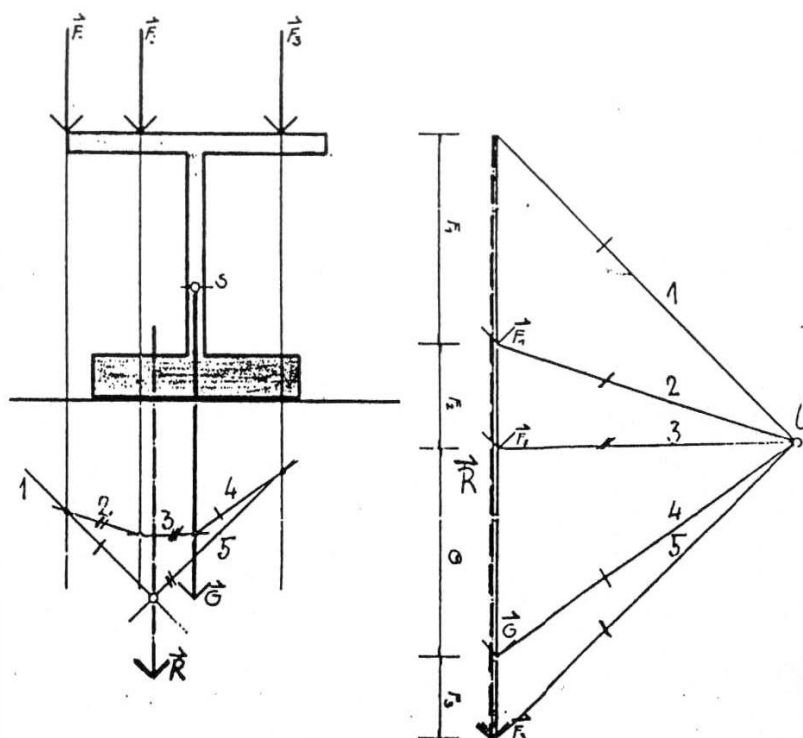
- Svake **dvije sile koje nisu paralelne** mogu se smatrati **centralnim sustavom**, pa njihova rezultanta **mora prolaziti kroz sjecište njihovih pravaca**.
- Najprije određujemo **rezultantu dviju proizvoljnih sila** (tzv. **prva parcijalna rezultanta**).
- Zatim toj rezultanti **dodajemo treću silu** i ponovno nalazimo novu rezultantu (**druga parcijalna rezultanta**).
- Postupak se **ponavlja dok se ne obuhvate sve sile** u sustavu, čime dobijemo konačnu veličinu i pravac rezultante.

Ovaj je postupak **dugotrajan**, a kod **sustava paralelnih sila** nije primjenjiv jer paralelne sile **nemaju zajedničku točku sjecišta pravaca**.

b) Grafički postupak – konstruiranjem verižnog poligona

Za sve sustave sila – uključujući i **paralelne sile** – moguće je primijeniti **verižni poligon sila**. Radi se o dosta jednostavnom postupku (Vidi i sliku 2.3.):

- Vertikalne sile F_1, F_2, F_3 i G **rastavljamo na kose komponentne sile** duž zamišljenih pravaca (zraka) označenih brojevima od 1 do 5.
- Primjerice, sila F_1 rastavlja se na komponente na pravcima 1 i 2, F_2 na 2 i 3, itd.
- Sve zrake **prolaze kroz istu proizvoljno odabranu točku 0** – tzv. **pol**.



Slika 2.3. Primjer konstrukcije verižnog poligona za određivanje rezultante paralelnih sila

Konstrukcija verižnog poligona:

1. Paralelu sa zrakom 1 nacrtamo od pravca sile F_1 do sjecišta.
2. Kroz tu točku povučemo zraku 2 (jer se komponente moraju sjeći u pravcu sile).
3. Tako nastavljamo konstruirati sustav sve dok se ne obuhvate sve sile.
4. **Rezultanta** se tada sastoji od dviju komponenti – na zrakama 1 i 5 – i **nalazi se na njihovu sjecištu**.

c) Analitički postupak – određivanje rezultante pomoću statičkih momenata

Rezultantu sustava možemo odrediti i **analitički**, koristeći se pojmom **statičkog momenta sile**. U tu svrhu potrebno je definirati utjecaj različitog položaja sile u odnosu na neku točku. Taj se utjecaj opisuje kao **statički moment sile** i definira se kao **umnožak promatrane sile i okomite udaljenosti d od pravca djelovanja te sile do točke** koju analiziramo (izraz 2.5.).

Statički moment sile:

$$M = F \cdot d \quad (2.5.)$$

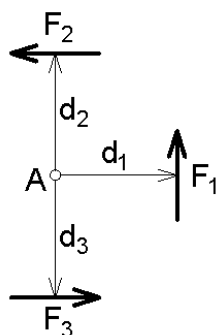
gdje je: F – veličina sile (opterećenje); d – okomita udaljenost promatrane sile do promatrane točke.

Moment sile vektorska je veličina određena **veličinom i smjerom rotacije** (pozitivan za smjer suprotan kretanju kazaljke sata, negativan obrnuto). Mjerna jedinica za moment sile je **kNm**.

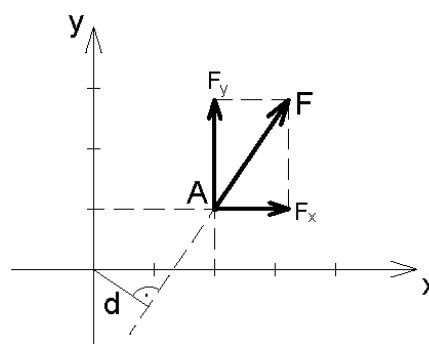
Momenti na istu točku mogu se **algebarski zbrajati** prema izrazu:

$$M_A = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 \quad (2.6.)$$

gdje je: M_A – statički moment sile oko točke A; $F_{1,2,3}$ – sile (opterećenja); $d_{1,2,3}$ – okomita udaljenost promatrane sile $F_{1,2,3}$ do promatrane točke A.



a) Opći način zbrajanja na točku A



b) Zbrajanje po komponentama na točku 0

Slika 2.4. Grafički prikaz određivanja ukupnog statičkog momenta sile oko promatrane točke

Statički moment sile F jednak je sumi momenata njezinih komponenta F_x , F_y na promatranu točku.

$$M_0^F = F \cdot d \rightarrow M_0^F = -F_x \cdot d_y + F_y \cdot d_x \quad (2.7.)$$

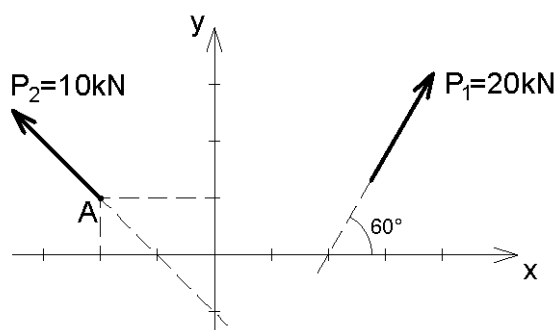
Na temelju prethodnih izraza očito je da će **statički moment rezultante** na neku točku biti **jednak zbroju momenata njezinih komponenta** na istu točku. To se pravilo zove **momentno pravilo ili Varignonov teorem** i može se općenito napisati kao:

$$M^R = R \cdot d_R = \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i \quad (2.8.)$$

gdje je: M^R – statički moment rezultante oko proizvoljne točke; $R_{1,2,3}$ – resultantna sila koja je jednaka zbroju pojedinih sila F_i ; F_i – sile (opterećenja); d_R – okomita udaljenost rezultante R do promatrane točke; d_i – okomita udaljenost promatrane sile F_i do promatrane točke.

Za bolju ilustraciju prethodno opisanog postupka u nastavku slijede primjeri određivanja rezultante danog sustava sila grafičkim i analitičkim postupkom.

2.3.1. Opći sustav sila – 1. primjer



Zadane su dvije sile P_1 i P_2 .

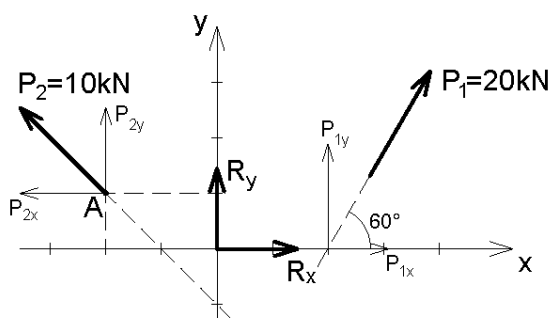
$$P_1 = 20 \text{ kN}, \alpha_1 = 60^\circ$$

$$P_2 = 10 \text{ kN}, A(-2, 1)$$

Potrebno je odrediti rezultantu sila analitičkim i grafičkim postupkom.

Napomena: odrediti položaj rezultante.

1) Analitički postupak



Pretpostavimo i na skici nacrtamo komponente rezultante R te rastavimo sile P_1 i P_2 na komponente. Pri tome se sjetimo kako je sila klizni vektor, pa je možemo rastaviti na komponente u bilo kojoj točki kroz koju sila prolazi.

Rezultantu analitički određujemo prema pravilima iz prethodnog poglavlja (izrazi 2.1. i 2.2.), pa je horizontalna (x) komponenta rezultante jednaka zbroju horizontalnih (x) komponenata sila P_1 i P_2 , dok je vertikalna (y) komponenta rezultante jednaka zbroju vertikalnih (y) komponenata sila P_1 i P_2 , poštujući orijentacije sila u odnosu na koordinatne osi x i y.

$$R_x = \sum P_{ix}$$

$$R_x = P_1 \cdot \cos 60^\circ - P_2 \cdot \cos 45^\circ$$

$$R_x = 20 \cdot 0,5 - 10 \cdot 0,707 = 2,93 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum P_{iy}$$

$$R_y = P_1 \cdot \sin 60^\circ + P_2 \cdot \sin 45^\circ$$

$$R_y = 20 \cdot 0,866 - 10 \cdot 0,707 = 24,39 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 24,57 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha_R = R_y / R_x = 24,39 / 2,93 = 8,32$$

$$\alpha_R = 83,1^\circ \quad \text{I kv.}$$

Kako bismo odredili položaj rezultante, potrebno je primijeniti Varignonov teorem (izraz 2.8.).

$$M_0^R = \sum M_0^{P_i}$$

$$M_0^R = P_{1x} \cdot 0 + P_{1y} \cdot 2,0 + P_{2x} \cdot 1,0 - P_{2y} \cdot 2,0$$

$$M_0^R = 0 + 20 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 + 10 \cdot \cos 45^\circ \cdot 1 - 10 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2$$

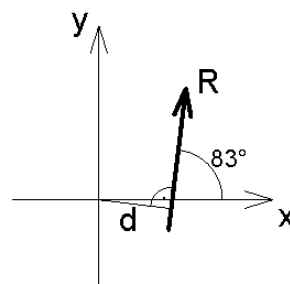
$$M_0^R = 27,57 \text{ kNm}$$

Iz dobivenog statičkog momenta rezultante možemo odrediti položaj rezultante na dva načina:

- 1) Odredimo krak sile R na ishodište:

$$M = R \cdot d$$

$$d = \frac{M}{R} = \frac{27,57}{24,57} = 1,12 \text{ m}$$

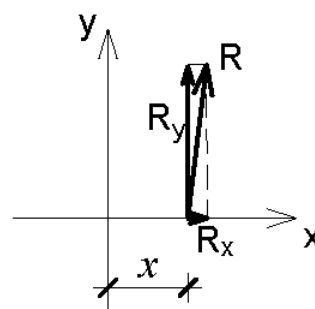


- 2) Preko Varignonova teorema, primjenom izraza 3.4. odredimo nultočku rezultante (odsječak na koordinatnoj osi x):

$$M_0 = R_y \cdot x + R_x \cdot 0$$

$$27,57 = 24,39 \cdot x$$

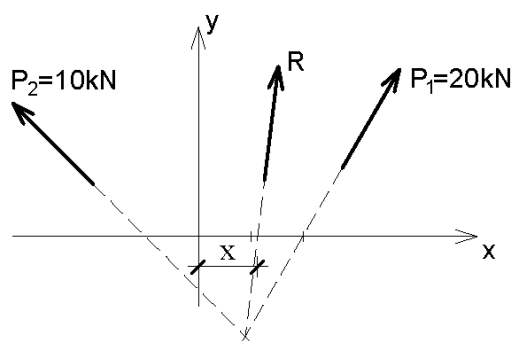
$$x = \frac{27,57}{24,39} = 1,13 \text{ m.}$$



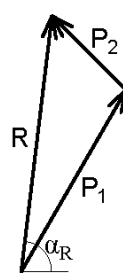
2) Grafički postupak

Grafički postupak radimo primjenom poligona sila u koji nanosimo poznate sile P_1 i P_2 . Sile crtamo kao vektore prenoseći paralele iz plana sila u poligon sila (pomoću dvaju trokuta), crtajući vektore dužine sukladne veličini sila i definiranim mjerilom.

Plan sila:



Poligon sila:



MJ: 1 cm :: 5 kN

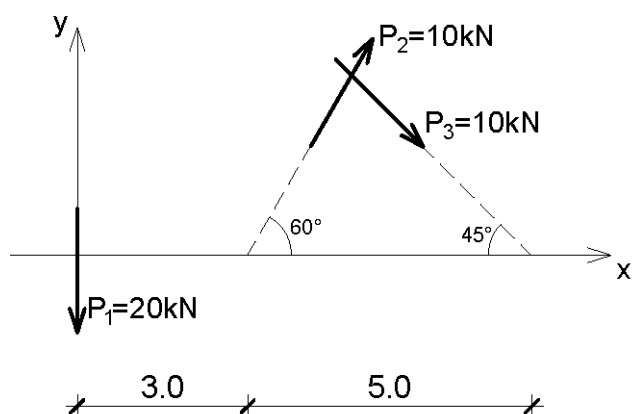
$$R = 25 \text{ kN}$$

$$\alpha_R = 83^\circ$$

$$x = 1,1 \text{ m}$$

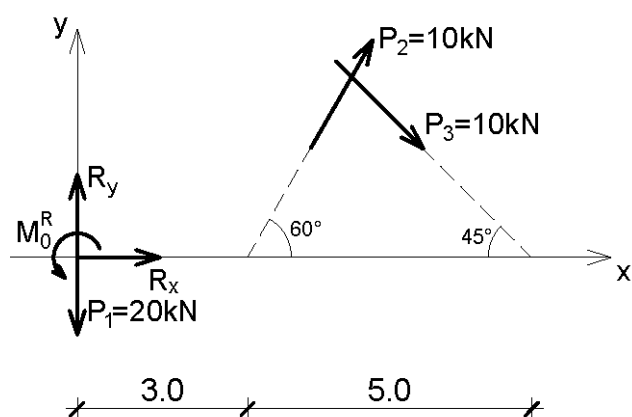
Tražena rezultanta R spaja početnu točku prve sile P_1 i vrh posljednje sile P_2 . Očitamo dužinu rezultante i pomoću mjerila preračunamo u veličinu sile te kutomjerom očitamo kut α_R koji rezultanta zatvara s horizontalom. Dobivenu rezultantu prenesemo s poligona na plan sila (paralelno, pomoću dvaju trokuta), a prema pravilima koja vrijede za centralni sustav sila znamo da rezultanta mora prolaziti kroz točku gdje se sijeku sile P_1 i P_2 . Na kraju izmjerimo položaj (hvatište) rezultante kao odsječak na osi x .

2.3.2. Opći sustav sila – 2. primjer



Za zadani sustav sila potrebno je odrediti rezultantu sila analitičkim i grafičkim postupkom.

1) Analitički postupak



Pretpostavimo i na skici nacrtamo komponente rezultante R_x i R_y , te moment od tražene rezultante na ishodište M_0^R . Rezultantu određujemo prema pravilima iz prethodnog poglavlja, pa je horizontalna komponenta rezultante R_x jednaka zbroju horizontalnih (x) komponenata sila $P_1 - P_3$, dok je vertikalna komponenta rezultante R_y jednaka zbroju vertikalnih (y) komponenata sila $P_1 - P_3$, poštujući orijentacije sila u odnosu na koordinatne osi x i y.

$$R_x = \sum P_{ix}$$

$$R_x = P_1 \cdot \cos 90^\circ + P_2 \cdot \cos 60^\circ + P_3 \cdot \cos 45^\circ$$

$$R_x = 20 \cdot 0 + 10 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,707 = 12,07 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum P_{iy}$$

$$R_y = -P_1 \cdot \sin 90^\circ + P_2 \cdot \sin 60^\circ - P_3 \cdot \sin 45^\circ$$

$$R_y = -20 \cdot 1,0 + 10 \cdot 0,866 - 10 \cdot 0,707 = -18,41 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 22,01 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha_R = R_y / R_x = -18,41 / 12,07 = -1,525$$

$$\alpha_R = -56,75^\circ \text{ (IV kv.)}$$

Kako bismo odredili položaj rezultante, potrebno je primijeniti Varignonov teorem (izraz 2.8.). Pri tome se prisjetimo kako je statički moment sile na neku točku jednak sumi momenata

njezinih komponentata na istu točku. S obzirom na to da su nam poznate sve točke u kojima sile presijecaju osi x , u tim ćemo točkama sile rastaviti na komponente. Stoga će nam sve horizontalne (x) komponente sila prolaziti kroz ishodište i njihov će krak sile biti jednak nuli, pa u izrazu za moment imamo samo vertikalne (y) komponente sila s pripadajućim krakovima sila.

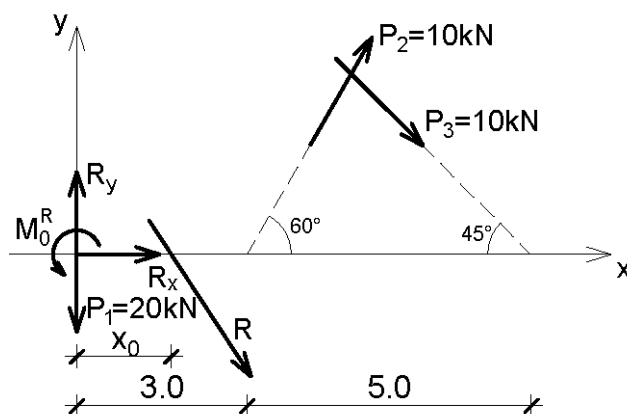
$$M_0^R = \sum M_0^{P_i}$$

$$M_0^R = P_{1y} \cdot 0 + P_{2y} \cdot 3,0 - P_{3y} \cdot 8,0$$

$$M_0^R = 0 + 10,0 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3,0 - 10,0 \cdot \sin 45^\circ \cdot 8,0$$

$$M_0^R = 10 \cdot 0,866 \cdot 3,0 - 10 \cdot 0,707 \cdot 8,0 = -30,58 \text{ kNm}$$

Iz dobivenog statičkog momenta rezultante određujemo odsječak na osi x , gdje rezultanta presijeca navedenu os:



$$M_0 = R_y \cdot x + R_x \cdot 0$$

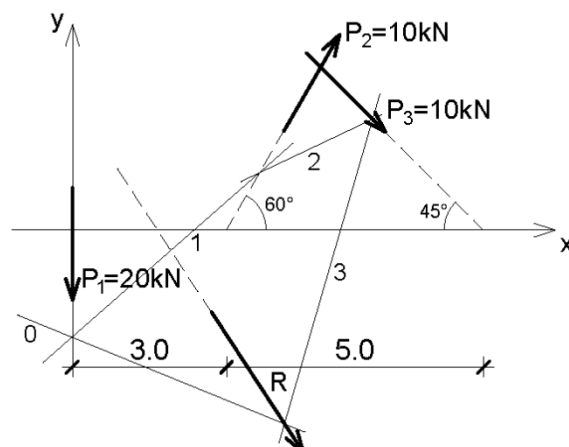
$$-30,58 = -18,41 \cdot x$$

$$x_0 = \frac{-30,58}{-18,41} = 1,66 \text{ m}$$

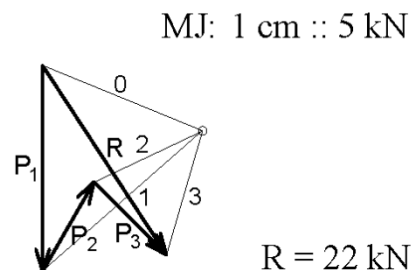
2) Grafički postupak

Grafički postupak radimo primjenom poligona sila i verižnog poligona. Sile crtamo kao vektore prenoseći paralele iz plana sila u poligon sila (pomoću dvaju trokuta), crtajući vektore dužine sukladne veličini sila i definiranim mjerilom.

Plan sila:



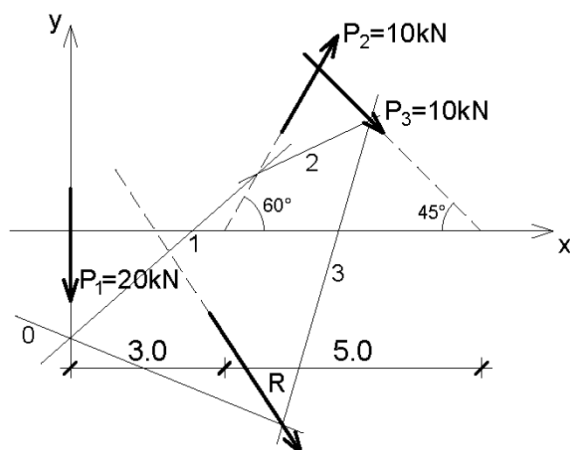
Poligon sila:



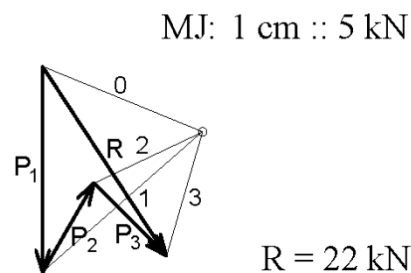
Rezultantu R određujemo kao silu koja spaja početak prve sile P_1 i vrh zadnje sile P_3 . Pravac djelovanja rezultante na planu sila određujemo crtanjem verižnog poligona. Najprije na poligonu sila proizvoljno odaberemo pol verižnog poligona te crtamo zrake kao spojnice svih početaka i krajeva sila s odabranim polom, zatim zrake numeriramo brojevima od 0 do 3. Na planu sila produžimo pravce djelovanja sila te prenesemo zrake paralelno (pomoću dvaju trokuta) iz poligona sila. Početnu zraku 0 postavljamo proizvoljno na planu sila, pa zatim crtamo zraku 1 kroz točku u kojoj se sijeku početna zraka 0 i pravac sile P_1 . Zatim nađemo sjecište zrake 1 s pravcem sile P_2 i kroz tu točku crtamo zraku 2. Kroz točku u kojoj se sijeku zraka 2 i pravac sile P_3 postavljamo zraku 3. Na kraju produžimo pravce zraka 0 i 3, pronađemo njihovo sjecište i kroz tu točku crtamo rezultantu R . Pravac i orijentaciju rezultante prenosimo iz poligona na plan sila. Očitamo na poligonu sila dužinu rezultante R pa pomoću mjerača preračunamo u veličinu sile.

Alternativni grafički postupak rješavanja ovog zadatka bez primjene verižnog poligona provodi se na način da sustav od triju sila (koje se ne sijeku u istoj točki) reduciramo na sustav od dviju sila (kojima možemo odrediti sjecište). Kako je prikazano na crtežu u nastavku, pronađemo rezultantu sila P_2 i P_3 , nakon čega odredimo sjecište te sile sa silom P_1 , čime smo odredili točku kroz koju prolazi rezultanta R zadanog sustava sila.

Plan sila:



Poligon sila:



3. Ravnoteža sustava

3.1. *Općenito o ravnoteži*

Djelovanje svake sile na neko kruto tijelo uzrokuje njegovo pomicanje. Kada sila djeluje na konstrukciju ili neki njezin element, cilj je spriječiti to pomicanje i osigurati ravnotežno stanje. **Statika** je grana mehanike koja se bavi analizom takvih ravnotežnih stanja. Riječ *statika* potječe od grčke riječi *statikos*, što znači "ono što miruje" – nešto što je statično i nepokretno.

Temeljna ideja statike počiva na pretpostavci da će građevinske konstrukcije i njihovi elementi, pod djelovanjem opterećenja, ostati mirni, tj. u stanju ravnoteže. Iako su konstrukcije deformabilne, dopušteni pomaci su u pravilu toliko mali u odnosu na dimenzije konstrukcije da se ona može smatrati nepokretnom i nedeformiranom. Takvo se stanje prihvaća kao ravnotežno.

Ravnoteža nekog elementa bit će ostvarena ako su spriječeni svi njegovi mogući pomaci. U ravnini se tijelo može kretati na beskonačno mnogo načina, ali svi ti pomaci mogu se svesti na tri osnovne komponente:

- horizontalni pomak (translacija u osi x)
- vertikalni pomak (translacija u osi y)
- zakretanje (rotacija oko osi okomite na ravninu).

Ako spriječimo oba translacijska pomaka i rotaciju, osigurali smo ravnotežno stanje tijela u ravnini, bez obzira na vrstu i smjer opterećenja.

Ravnoteža se u konstrukcijama ostvaruje **ležajevima**, odnosno osloncima. Sile koje na ležajevima uravnotežuju vanjska djelovanja nazivaju se **reakcije**. One su po veličini jednake, ali suprotno usmjerene silama koje djeluju na ležajeve.

3.2. *Ravnoteža centralnog sustava sila*

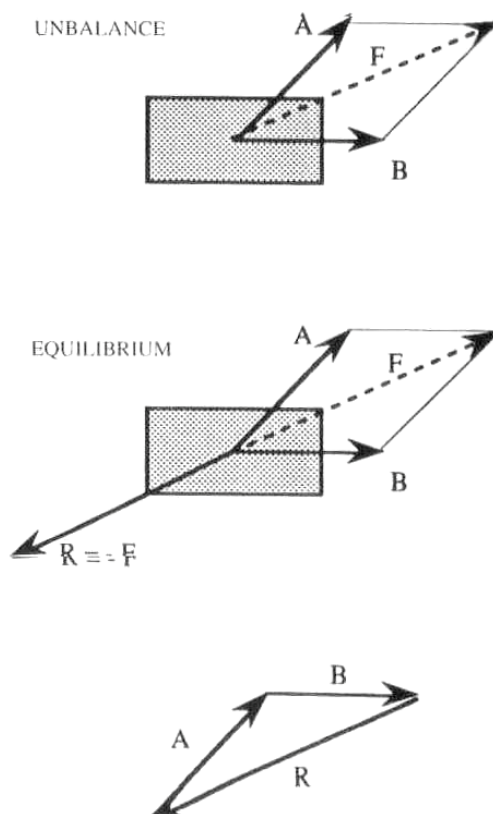
Ako se razmatra **centralni sustav sila**, u kojem pravci svih sila prolaze kroz jednu zajedničku točku, govorimo o **ravnoteži točke**. U takvom slučaju nema zakretanja, pa je za postizanje ravnoteže dovoljno spriječiti translaciju.

Reakcija (sila u ležaju) mora biti u ravnoteži s aktivnim djelovanjem, tj. **akcijom**. To znači da mora biti:

- kolinearna (biti na istom pravcu)
- jednaka po veličini
- suprotnog smjera.

Tada je **zbroj svih sila jednak nuli**, nema resultantne sile i sustav je u ravnoteži.

Prethodno navedeno možemo definirati i kao **grafički uvjet ravnoteže centralnog sustava sila: poligon sila mora biti zatvoren**. Drugim riječima, sve sile (akcije i reakcije) moraju se međusobno poništiti – moraju biti jednake, suprotne i ležati na istom pravcu. Navedeno je jasno prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1. Grafički uvjet ravnoteže centralnog sustava sila

Prethodno opisani uvjet ravnoteže centralnog sustava sila može se izraziti i **analitički**. U slučaju **centralnog sustava sila** sve sile djeluju kroz jednu točku, recimo točku A. Kako su svi pravci djelovanja sila koncentrirani u toj točki, na tijelo ne može djelovati moment, tj. **nema rotacije**. Dakle, jedino što može izazvati pomak jest **translacija** tijela u ravnini.

Kako bismo spriječili translaciju, potrebno je da se sve sile međusobno ponište. To znači da **zbroj svih sila koje djeluju na sustav mora biti jednak nuli**. Budući da se sile u ravnini mogu rastaviti na horizontalnu i vertikalnu komponentu, uvjeti ravnoteže pišu se ovako:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (3.1.a)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (3.1.b)$$

Svaku silu potrebno je rastaviti na njezine komponente u smjeru osi x i y. Ako znamo iznos sile F i kut α koji zatvara s horizontalom, tada vrijedi:

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha \quad F_{iy} = F_i \cdot \sin \alpha. \quad (3.2.)$$

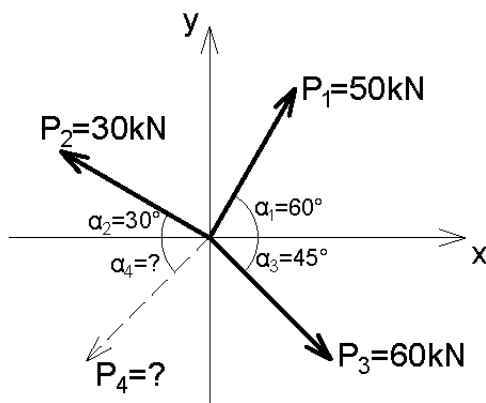
Znakovi komponenti određuju se prema orijentaciji u koordinatnom sustavu:

- smjer desno i gore je **pozitivan**
- smjer lijevo i dolje je **negativan**.

Nakon što se sve sile rastave na komponente i uvrste u jednačbe (3.1.a) i (3.1.b) i te se jednačbe riješe, dobit ćemo **nepoznate reakcije ili druge sile** koje trebamo da bi sustav bio u ravnoteži.

U sljedećim primjerima zadani centralni sustavi sila trebaju se dovesti u ravnotežu **analitičkim i grafičkim postupkom** određivanja uravnotežujućih sila.

3.2.1. Ravnoteža centralnog sustava sila – 1. primjer



Zadane su sile:

$$P_1 = 50 \text{ kN}, \alpha_1 = 60^\circ, \text{ I kv}$$

$$P_2 = 30 \text{ kN}, \alpha_2 = 30^\circ, \text{ II kv}$$

$$P_3 = 60 \text{ kN}, \alpha_3 = 45^\circ, \text{ IV kv}$$

$$P_4 = ?, \alpha_4 = ?$$

1) Analitički postupak

Pretpostavimo komponente sile P_4 , orijentirane u skladu s koordinatnim osima. Kako bi ravnoteža bila ispunjena, vektorski zbroj sila mora biti jednak nuli:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4 = 0.$$

Navedeno mora vrijediti za zbroj horizontalnih (x) komponentata, kao i za zbroj vertikalnih (y) komponentata sila. Ako uključimo izraze 3.1., poštujući orijentacije sila u odnosu na koordinatne osi x i y, dobivamo kako slijedi:

$$P_{1x} - P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} = 0$$

$$P_1 \cdot \cos 60^\circ - P_2 \cdot \cos 30^\circ + P_3 \cdot \cos 45^\circ + P_{4x} = 0$$

$$50 \cdot 0,5 - 30 \cdot 0,866 + 60 \cdot 0,707 + P_{4x} = 0$$

$$P_{4x} = -41,44 \text{ kN}$$

$$P_{1y} + P_{2y} - P_{3y} + P_{4y} = 0$$

$$P_1 \cdot \sin 60^\circ + P_2 \cdot \sin 30^\circ - P_3 \cdot \sin 45^\circ + P_{4y} = 0$$

$$50 \cdot 0,866 + 30 \cdot 0,5 - 60 \cdot 0,707 + P_{4y} = 0$$

$$P_{4y} = -15,88 \text{ kN}.$$

Konačni iznos sile P_4 dobijemo primjenjujući Pitagorin poučak, a kut pod kojim djeluje α_4 proizlazi iz omjera komponenti sile.

$$P_4 = \sqrt{P_{4x}^2 + P_{4y}^2} = 44,38 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha_4 = \frac{P_{4y}}{P_{4x}} = \frac{-15,88}{-41,44} = 0,383$$

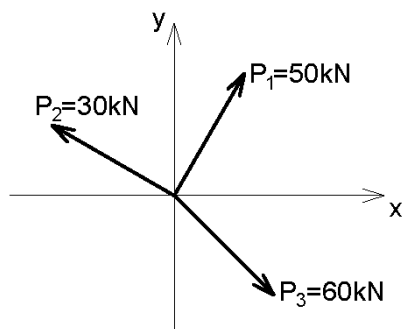
$$\alpha_4 = 21,0^\circ \quad \text{III kv}$$

$$= -180 + 21,0 = -159,0^\circ$$

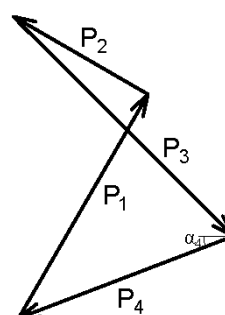
2) Grafički postupak

Grafički postupak radimo primjenom poligona sila u koji nanosimo sve poznate sile. Sile crtamo kao vektore prenoseći paralele iz plana sila (pomoću dvaju trokuta), crtajući vektore dužine sukladne veličini sila i definiranim mjerilom. Sile nanosimo jednu za drugom tako da se svaka iduća sila nastavlja iz vrha prethodno nacrtane sile.

Plan sila:



Poligon sila:



MJ: 1 cm :: 10 kN

$$P_4 = 44 \text{ kN}$$

$$\alpha_4 = 21^\circ$$

$$= -159^\circ$$

Kako bi ravnoteža bila ispunjena, zadnja sila P_4 mora zatvoriti poligon sila tako da kreće iz vrha posljednje sile P_3 i završava u početnoj točki prve sile P_1 . Na kraju, ako smo ispravno riješili zadatak, sve sile moraju pratiti jedna drugu, „kružeci“ po poligonu sila.

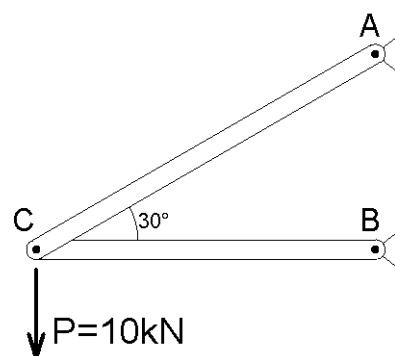
Traženu silu P_4 očitamo iz poligona sila, pomoću mjerila preračunamo u veličinu sile te kutomjerom očitamo kut α_4 koji sila zatvara s horizontalom:

$$P_4 = 4,4 \cdot 10 = 44 \text{ kN}$$

$$\alpha_4 = 21^\circ \text{ u III kvadrantu.}$$

3.2.2. Ravnoteža centralnog sustava sila - 2. primjer

Zadan je sustav prikazan na skici. Potrebno je analitičkim i grafičkim postupkom odrediti reakcije u osloncima A i B.

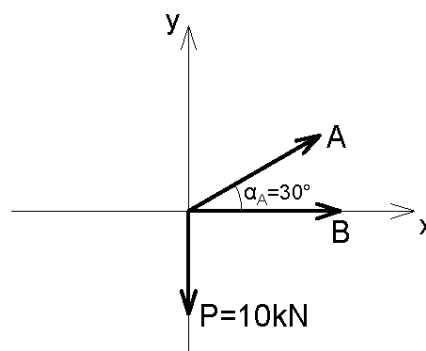


1) Analitički postupak

Uočimo kako reakcija u osloncu A mora ležati na pravcu AC, dok reakcija u osloncu B mora ležati na pravcu BC. Stoga zadatak možemo analizirati kao centralni sustav sila postavljen u točki C.

Kako bi ravnoteža bila ispunjena, vektorski zbroj sila mora biti jednak nuli:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{P} = 0$$



Navedeno mora vrijediti za zbroj horizontalnih (x) komponentata, kao i za zbroj vertikalnih (y) komponentata sila. Ako uključimo izraze 3.1, poštujući orijentacije sila u odnosu na koordinatne osi x i y, dobivamo kako slijedi:

$$A_x + B_x + P_x = 0$$

$$A \cdot \cos 30^\circ + B + 0 = 0$$

$$A \cdot 0,866 + B = 0$$

$$A_y + B_y - P_y = 0$$

$$A \cdot \sin 30^\circ + 0 - 10 = 0$$

$$A \cdot 0,5 = 10$$

$$A = 20,0 \text{ kN}.$$

Dobivenu reakciju A uvrstimo u ranije dobiveni izraz:

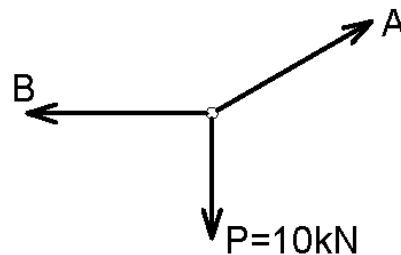
$$20 \cdot 0,866 + B = 0$$

$$B = -17,3 \text{ kN}.$$

Kako smo reakciju B dobili negativnog predznaka, stvarna orijentacija sile B suprotna je od prvotno pretpostavljene. Nije preporučljivo mijenjati pretpostavljenu orijentaciju sila, no ako se za to odlučimo, moramo nacrtati novu skicu sa stvarnim orijentacijama sila i u skladu s time ponovo ispisati reakcije.

$$A = 20,0 \text{ kN}$$

$$B = 17,3 \text{ kN}$$

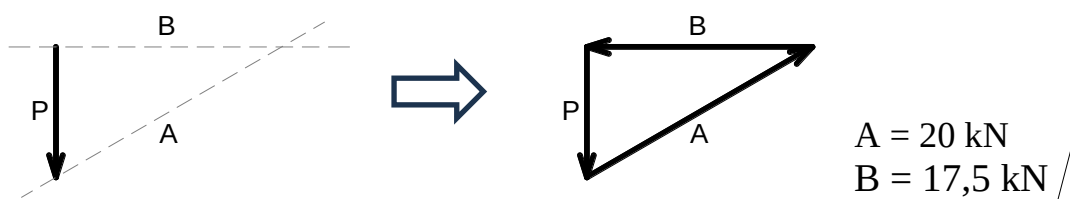


2) Grafički postupak

Grafički postupak radimo primjenom poligona sila, u kojem crtamo poznatu silu P , sukladno veličini sile, i definiranim mjerilom. Kako za sile A i B znamo samo pravce na kojima djeluju, sjetimo se da sile u poligonu sila moraju biti postavljene tako da svaka iduća sila kreće iz vrha prethodno nacrtane sile. Stoga postavimo pravac sile A tako da prolazi kroz vrh sile P , a pravac sile B tako da prolazi kroz početnu točku sile P .

Kada odredimo sjecište pravaca sila A i B , možemo nacrtati konačni poligon sila tako da sve sile prate jedna drugu, „kružeci“ po poligonu. Na kraju očitamo tražene reakcije A i B iz poligona sila.

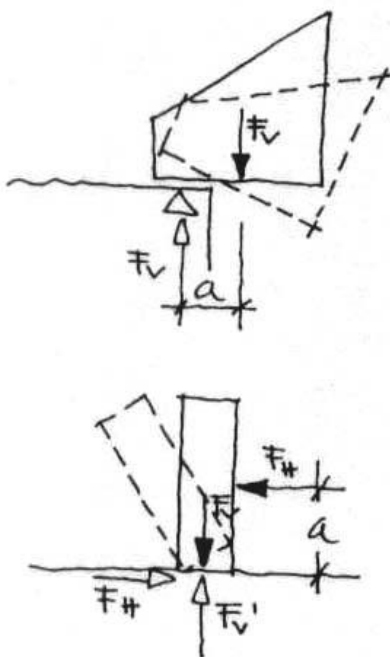
MJ: 1 cm :: 2,5 kN



3.3. Ravnoteža općeg sustava sila

Kada sve sile prolaze istom točkom, govorimo o **ravnoteži točke**, a uvjet ravnoteže tada je jednostavan: **sve sile moraju biti međusobno jednake i suprotne**, odnosno njihova suma mora biti jednaka nuli. No, u većini praktičnih slučajeva sile **ne prolaze kroz istu točku**. Tada taj uvjet **nije dovoljan** za uspostavu ravnoteže.

Čak i ako je **suma svih sila jednaka nuli**, sustav se može i dalje rotirati ako rezultatne sile i reakcije ne leže na istom pravcu. Do rotacije dolazi zbog djelovanja para jednakih i suprotnih sila na određenom međusobnom razmaku – takav se par naziva **spreg sila**, a njegov ukupan učinak izražava se kao **moment sile**.



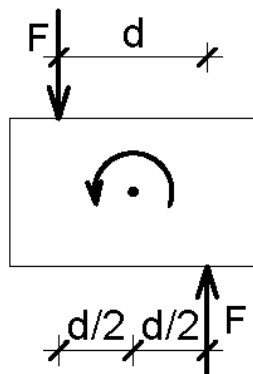
Slika 3.2. Prikaz rotacije sustava kada je suma svih sila jednaka nuli, ali sile ne prolaze istom točkom

Kao što je već navedeno, **moment sile** oko određene točke definira se kao:

$$M = F \cdot d \quad (3.3.)$$

gdje je: F – veličina sile (opterećenje); d – okomita udaljenost promatrane sile do promatrane točke.

Moment ima **smjer** (pozitivan ili negativan, ovisno o smjeru rotacije – najčešće u odnosu na pravilo desne ruke) i veličinu. Uobičajena je jedinica za moment sile je **kNm**.



Slika 3.3. Spreg sila F na udaljenosti d i ekvivalentni moment sile

3.4. *Analitički uvjeti ravnoteže općeg sustava sila*

Opći ravninski sustav sila sustav je u kojem **više sila djeluje u istoj ravnini**, ali **ne prolaze sve kroz istu točku**. To je najčešći slučaj u stvarnim konstrukcijama – npr. grede, okviri, krovne konstrukcije i sl.

U takvu sustavu sile mogu izazvati:

- **translaciju** (pomicanje u nekom smjeru),
- **rotaciju** (zakretanje oko neke točke).

Za razliku od centralnog sustava sila, gdje je dovoljno zadovoljiti uvjete za translaciju, kod **općeg ravninskog sustava sila** potrebno je zadovoljiti i uvjet da **nema rotacije**.

Zbog toga se definiraju **tri uvjeta ravnoteže**:

a) **Suma horizontalnih sila:**

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (3.4.)$$

b) **Suma vertikalnih sila:**

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (3.5.)$$

c) **Suma momenata:**

$$\sum_{i=1}^n M^i = 0 \quad (3.6.)$$

Ova tri uvjeta zajednički osiguravaju da tijelo neće ni **translirati** ni **rotirati**, čime se postiže **ravnotežno stanje**.

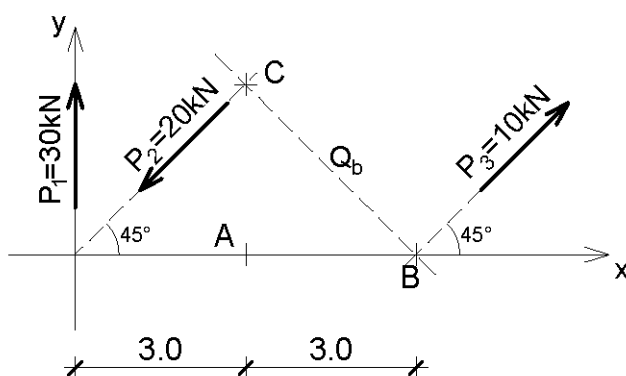
Pri tome se moment savijanja određuje preko izraza 3.3. Smjer momenta (pozitivan/negativan) ovisi o tome vrti li sila sustav **u smjeru kretanja kazaljke sata** ili suprotno.

Postupak rješavanja analitički:

1. **Rastavi sile na komponente** (ako nisu paralelne s osima).
2. **Primijeni tri uvjeta ravnoteže:**
 - $\sum F_x = 0$
 - $\sum F_y = 0$
 - $\sum M = 0$ – najbolje oko točke gdje neka sila "otpada", tj. gdje nema momenta.
3. **Riješi sustav jednadžbi** i izračunaj nepoznate sile ili reakcije.

Na sljedećem primjeru objasniti će se analitički uvjeti ravnoteže i analitički postupak rješavanja problema ravnoteže općeg sustava sila.

3.4.1. Analitički uvjeti ravnoteže općeg sustava sila – 1. primjer



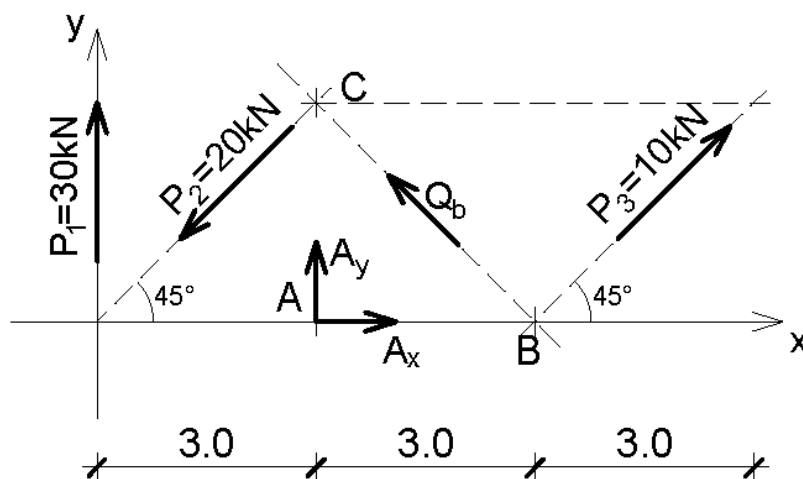
Potrebno je analitički uravnotežiti zadani sustav silama:

Q_A – prolazi točkom A

Q_b – leži na pravcu b.

Pretpostavimo i na skici nacrtamo komponente sile Q_A kao A_x i A_y te pretpostavimo orijentaciju sile Q_b . Kako bismo sustav bio u ravnoteži, koristimo se analitičkim uvjetima ravnoteže prema izrazima 3.4. – 3.6.

Uočimo kako nam je za prvi korak najlakše izračunati silu Q_b tako da postavimo sumu momenata na točku A. Na taj način dobivamo izraz u kojem imamo samo jednu nepoznanicu jer sila Q_A prolazi kroz tu točku i ne daje moment.



$$\sum M_A = 0$$

$$Q_b \cdot \sin 45^\circ \cdot 3,0 - P_1 \cdot 3,0 + P_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 3,0 + P_3 \cdot \sin 45^\circ \cdot 3,0 = 0$$

$$Q_b \cdot 0,707 \cdot 3,0 = 30,0 \cdot 3,0 - 20,0 \cdot 0,707 \cdot 3,0 - 10,0 \cdot 0,707 \cdot 3,0$$

$$Q_b = \frac{26,36}{2,12} = 12,43 \text{ kN}$$

Kada smo odredili silu Q_b , možemo izračunati komponente sile Q_A tako da upotrijebimo izraze 3.4. i 3.5. za sumu horizontalnih i vertikalnih sila. Iako bismo na taj način dobili tražene komponente sile Q_A , navedeni postupak nije preporučljiv jer bismo se koristili ranije izračunatom silom Q_b , pa se eventualna pogreška u izračunu jedne sile prenosi na daljnji izračun. Stoga je bolje upotrijebiti izraze za sumu momenata na točke B i C, gdje se sijeku po dvije od triju nepoznatih sila. Na taj način određujemo silu Q_A , odnosno njezine komponente neovisno o ranijem proračunu.

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-A_y \cdot 3,0 - P_1 \cdot 6,0 + P_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 6,0 = 0$$

$$-A_y \cdot 3,0 - 30,0 \cdot 6,0 + 20,0 \cdot 0,707 \cdot 6,0 = 0$$

$$A_y = -95,16/3,0 = -31,72 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$A_x \cdot 3,0 - P_1 \cdot 3,0 + P_3 \cdot \sin 45^\circ \cdot 6,0 = 0$$

$$A_x \cdot 3,0 - 30,0 \cdot 3,0 + 10,0 \cdot 0,707 \cdot 6,0 = 0$$

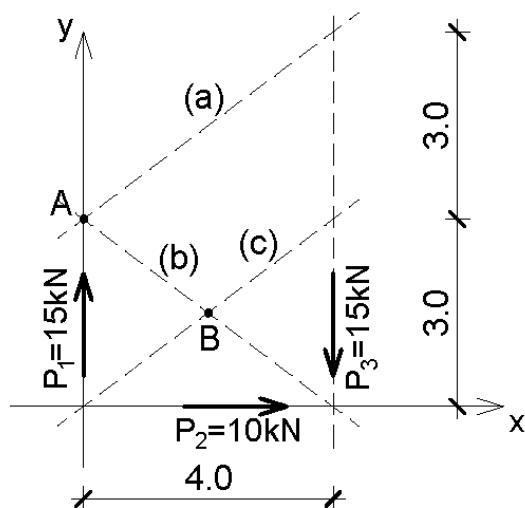
$$A_x = 47,58/3,0 = 15,86 \text{ kN}$$

$$Q_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 35,46 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha_A = \frac{A_y}{A_x} = \frac{-31,72}{15,86} = -2,0$$

$$\alpha_R = -63,43^\circ \text{ (IV kv.)}$$

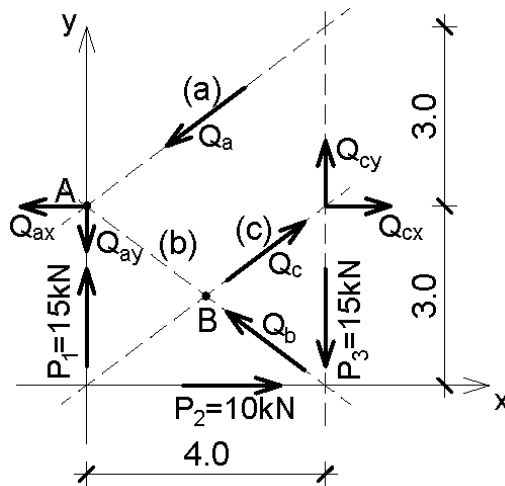
3.4.2. Analitički uvjeti ravnoteže općeg sustava sila – 2. primjer



Zadani sustav sila P_1 , P_2 i P_3 potrebno je analitičkim postupkom uravnotežiti sa silama na zadanim pravcima a , b i c .

Zadatak će se riješiti analitičkim postupkom. Stoga najprije moramo pretpostaviti sile Q_a , Q_b i Q_c na zadanim pravcima a , b i c . Ako zadani sustav sila P_1 , P_2 i P_3 moramo uravnotežiti sa sustavom sila Q_a , Q_b i Q_c , tada rezultanta jednog sustava sila mora biti u ravnoteži s rezultantom drugog sustava sila.

Uočimo kako imamo tri nepoznate sile pa, kako bismo ih odredili, postavimo izraze za sumu momenata na točke u kojima se sijeku dvije od triju traženih sila. Na taj način možemo odrediti sile Q_a i Q_c , dok silu Q_b moramo izračunati na drugi način jer ne možemo odrediti točku u kojoj se sijeku sile Q_a i Q_c . Ako uočimo da su sile P_1 i P_3 vertikalne sile istog iznosa, ali suprotnog smjera, a sila P_2 je horizontalna sila, najjednostavnije ćemo silu Q_b odrediti preko izraza za sumu vertikalnih sila.



$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,600$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,800$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P_2 \cdot 3,0 - P_3 \cdot 4,0 + Q_{cy} \cdot 4,0 = 0$$

$$10,0 \cdot 3,0 - 15,0 \cdot 4,0 + Q_c \cdot \sin \alpha \cdot 4,0 = 0$$

$$Q_c = \frac{60,0 - 30,0}{0,6 \cdot 4,0} = 12,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$P_2 \cdot 1,5 - P_1 \cdot 2,0 - P_3 \cdot 2,0 + Q_{ax} \cdot 1,5 + Q_{ay} \cdot 2,0 = 0$$

$$10,0 \cdot 1,5 - 15,0 \cdot 2,0 - 15,0 \cdot 2,0 + Q_a \cdot \cos \alpha \cdot 1,5 + Q_a \cdot \sin \alpha \cdot 2,0$$

$$Q_a = \frac{30,0 + 30,0 - 15,0}{0,8 \cdot 1,5 + 0,6 \cdot 2,0} = 18,75 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$Q_{by} + Q_{cy} - Q_{ay} = 0$$

$$Q_b \cdot \sin \alpha + Q_c \cdot \sin \alpha - Q_a \cdot \sin \alpha = 0$$

$$Q_b = \frac{18,75 \cdot 0,6 - 12,5 \cdot 0,6}{0,6} = 6,25 \text{ kN}$$

3.5. Grafički uvjeti ravnoteže općeg sustava sila

Grafički uvjet ravnoteže centralnog sustava sila definira da poligon sila mora biti zatvoren. Kao i u slučaju analitičkih uvjeta ravnoteže općeg sustava sila, samo uvjet kojim je osigurano da je suma svih sila jednaka nuli očigledno nije dovoljan. Stoga je potreban dodatni uvjet koji je kompatibilan analitičkom uvjetu koji kaže da suma momenata treba biti nula.

Kod grafičkog postupka sve se rješava **crtajući sile kao vektore** u mjerilu i da bi se zadovoljili svi potrebni uvjeti, potrebno je crtati:

a) Poligon sila

Za svaku silu nacrtava se vektor (smjer i duljina u mjerilu). Ako se sve sile poredaju "vrh-na-rep" i formiraju zatvorenu figuru (najčešće trokut, četverokut...), tada vrijedi:

$$\text{poligon sila zatvoren} \Rightarrow \sum \vec{F} = 0. \quad (3.6.)$$

To znači da je **ukupna rezultanta svih sila jednaka nuli** – dakle, nema translacije.

b) Geometrijski uvjet za momente

Da **nema rotacije**, pravci svih sila moraju **prolaziti kroz jednu točku** (ili se njihove linije djelovanja moraju sjeći u jednoj točki). Ovo je **grafički ekvivalent momentu** jer ako npr. pravci triju sila **prolaze kroz istu točku**, njihovi se momenti međusobno poništavaju.

Za opći sustav sila glede analitičkih i grafičkih uvjeta može se uzeti da vrijedi tablica 3.1.

Tablica 3.1. Prikaz analitičkih i grafičkih uvjeta za spriječenost translacije i rotacije

	<i>Analitički uvjeti</i>	<i>Grafički uvjeti</i>
Translacija	$\sum F_x = 0$ i $\sum F_y = 0$	Poligon sila zatvoren
Rotacija	$\sum M = 0$	Pravci sila sijeku se u jednoj točki

Grafički postupak rješavanja sastoji se od sljedećih radnji:

1. **Nacrtaj pravce djelovanja svih poznatih i nepoznatih sila.**
2. **Odredi rezultantu poznatih sila** (geometrijski, pomoću poligona sila).
3. **Odaberi točku kroz koju će proći tražene sile** tako da zadovolje uvjet rotacije – najčešće sjecište pravaca.
4. **Zatvori poligon sila** i očitaj veličine traženih sila iz skice u mjerilu.

Grafički postupci kojima se koristimo u rješavanju navedenog problema, a koji zadovoljavaju prethodno navedeno, jesu sljedeći:

a) Culmannov postupak:

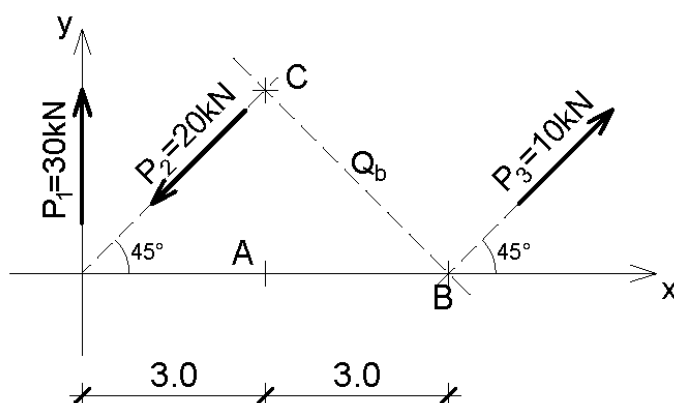
- Njime se koristimo kada tražimo **dvije sile** koje zajedno s rezultantom osiguravaju ravnotežu.
- Tražimo **pravac (Culmannov pravac)** koji povezuje sjecišta sila – kao rezultat dobijemo smjer i iznos traženih sila grafički.

b) Verižni poligon:

- Njime se koristimo kod **paralelnih sila**.
- Kombinira se s **trokutom sila** i traži se **zaključna zraka**, koja povezuje krajeve verižnog poligona.
- Zaključna zraka je **sila koja osigurava ravnotežu**.

U nastavku će se detaljno objasniti grafički uvjeti ravnoteže na istim primjerima na kojima su pojašnjeni i analitički uvjeti.

3.5.1. Grafički uvjeti ravnoteže općeg sustava sila – 1. primjer



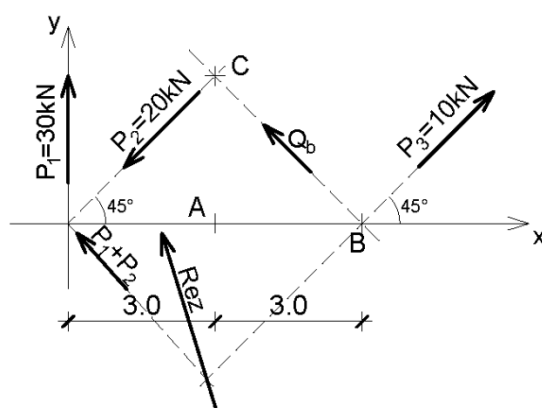
Potrebno je grafički uravnotežiti zadani sustav silama:

Q_A – prolazi točkom A

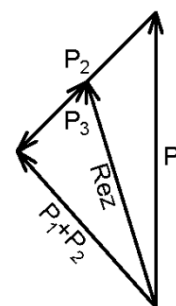
Q_b – leži na pravcu b.

Sustav sa slike opterećen je silama P_1 , P_2 i P_3 . Rezultanta sustava dobivena je ranije opisanim postupkom: najprije je određena parcijalna rezultanta sila P_1 i P_2 (na njihovu sjecištu), a zatim i konačna rezultanta kao zbroj te parcijalne rezultante i sile P_3 (ponovo na sjecištu tih sila).

Plan sila:



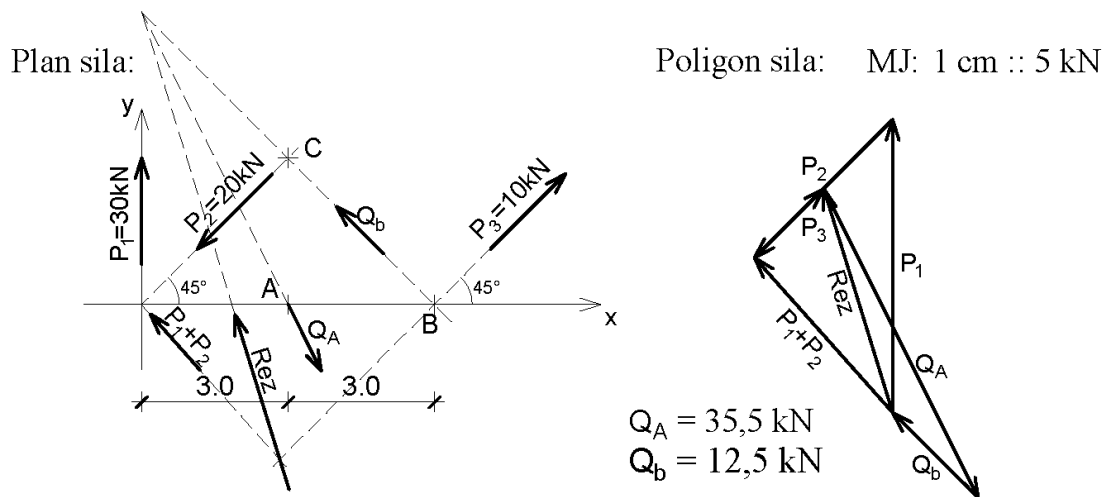
Poligon sila: MJ: 1 cm :: 5 kN



Ravnotežu sustava trebaju osigurati dvije sile: sila koja prolazi kroz točku A te sila na pravcu b. Kako osigurati da je suma momenata tih triju sila nula?

Ako znamo da je moment sile jednak umnošku sile i njezina kraka (udaljenosti pravca sile do točke na koju sila djeluje), jasno je da će za sve točke na pravcu sile moment biti jednak nuli. Dakle, ako pronađemo točku koja se nalazi na pravcima svih triju sila, suma momenata bit će nula u toj točki, time i u bilo kojoj drugoj točki krutog tijela.

Ako sila u točki A prolazi sjecištem pravaca b i rezultante, gornji će zahtjev biti ispunjen i suma momenata bit će nula. Sada je još potrebno zatvoriti poligon sila (kako bi i suma sila bila nula) i odrediti veličine traženih sila. Možemo zaključiti da će **tri sile biti u ravnoteži kada se pravci sila sijeku u istoj točki i kada tražene sile zatvaraju trokut sila.**



a) Grafički uvjeti ravnoteže primjenom Culmannova postupka

Pristup sličan prethodno opisanom možemo primijeniti i u slučaju kada trebamo osigurati ravnotežu s tri silama na poznatim pravcima djelovanja. Nađemo li sjecište rezultante opterećenja i jedne (proizvoljno izabrane) od uravnotežujućih sila, odredili smo točku kroz koju mora proći parcijalna rezultanta tih dviju sila. Kroz sjecište preostalih dviju uravnotežujućih sila mora proći parcijalna rezultanta drugih dviju sila. Na taj smo način sustav od četiriju sila (rezultanta opterećenja i tri uravnotežujuće sile) sveli na dvije parcijalne rezultante. Ako se podsjetimo da će dvije sile biti u ravnoteži kada su jednake i suprotne te leže na istom pravcu, spojnica dvaju presjecišta određuje pravac djelovanja parcijalnih rezultanti. Ta se spojnica naziva **Culmannov pravac** pa se i postupak uravnoteženja naziva **Culmannovim postupkom**.

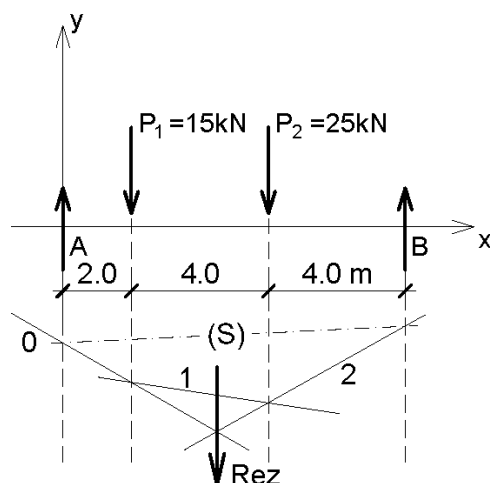
Iz trokuta sila koji zatvaraju rezultanta opterećenja, prvoodabrana uravnotežujuća sila i sila na Culmannovu pravcu, određujemo veličine dviju nepoznatih sila. Sila na Culmannovu pravcu parcijalna je rezultanta preostalih dviju sila pa iz novog trokuta sila možemo odrediti veličine preostalih sila.

Možemo zaključiti i da je pravac koji prolazi točkom A i sjecištem pravca b i rezultante sustava iz prethodnog primjera također Culmannov pravac ako komponente sile u točki A promatramo kao dvije nepoznate sile na poznatim pravcima, recimo u smjeru x i y osi.

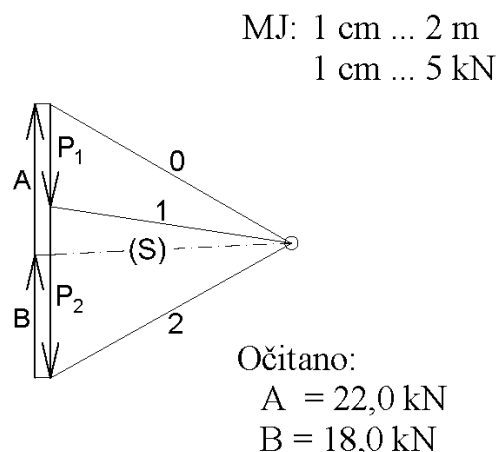
b) Grafički uvjeti ravnoteže primjenom verižnog poligona

Kada su uravnotežujuće sile paralelne s rezultantom, nije moguće primijeniti ranije objašnjeni princip Culmannovim postupkom, pa se koristimo verižnim poligonom analogno kao i za slučaj rezultante vertikalnog sustava sila. Sam postupak pojasnit ćemo na primjeru prikazanom na sljedećoj stranici gdje imamo dvije paralelne vertikalne sile koje je potrebno uravnotežiti s dvjema silama na paralelnim pravcima.

Plan sila:



Poligon sila:



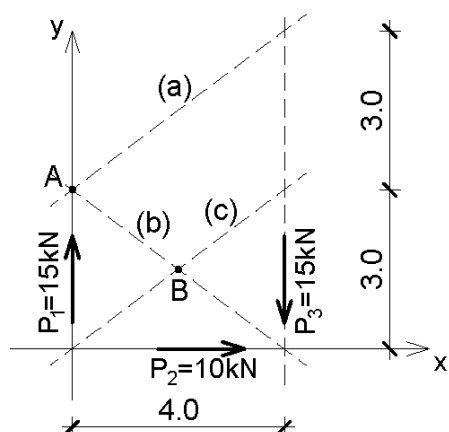
Verižnim je poligonom rezultanta određena komponentama na pravcima početne 0 i završne zrake 2, pa možemo reći da imamo sustav s četirima silama: dvije komponente rezultante i dvije uravnotežujuće sile. Ako nađemo sjecište prve uravnotežujuće sile A i početne zrake 0, znamo da tuda mora proći njihova (parcijalna) rezultanta. Isto vrijedi i za sjecište druge uravnotežujuće sile B i završne zrake 2. Sada smo sustav s četirima silama sveli na dvije parcijalne rezultante.

Ako se ponovo podsjetimo (grafički uvjet ravnoteže centralnog sustava sila) da dvije sile mogu biti u ravnoteži samo kada leže na istom pravcu, jasno je da parcijalne rezultante moraju ležati na spojnici tih dvaju presjecišta. Ta se spojnica, koja je zapravo Culmannov pravac, naziva zaključnom zrakom verižnog poligona (S) i predstavlja jednu od komponenata obiju uravnotežujućih sila. Druga je komponenta na pravcu početne zrake 0 za prvu uravnotežujuću silu A te na pravcu završne zrake 2 za drugu uravnotežujuću silu B.

Dakle, možemo zaključiti da će opći sustav sila u ravnini biti u ravnoteži kada **verižni poligon i poligon sila budu zatvoreni**. To nazivamo **općim grafičkim uvjetima ravnoteže općeg sustava sila**.

U slučaju kada se ne radi o sustavu paralelnih sila, nije potrebno raditi verižni poligon. U tom će slučaju, kao što je ranije navedeno, uvjet ravnoteže biti zadovoljen ako se pravci triju sila (rezultante i dviju uravnotežujućih sila) sijeku u istoj točki i ako sile zatvaraju trokut sila.

3.5.2. Grafički uvjeti ravnoteže općeg sustava sila – 2. primjer

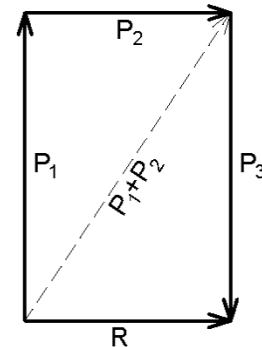
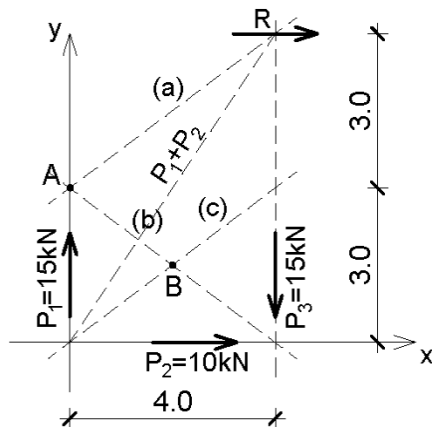


Zadani sustav sila P_1 , P_2 i P_3 potrebno je grafičkim postupkom uravnotežiti sa silama na zadanim pravcima a , b i c .

Prvo što moramo odrediti jest rezultanta sila P_1 , P_2 i P_3 . Poziciju rezultante na planu sila možemo odrediti primjenom verižnog poligona. Kako crtež ne bismo opteretili velikim brojem linija, reducirat ćemo sustav na dvije sile, pa će rezultanta prolaziti kroz njihovo sjecište. Navedeno radimo na način da najprije pronađemo pravac rezultante sila P_1 i P_2 u poligonu sila te ga prenesemo na plan sila kroz točku gdje se te dvije sile sijeku. Zatim odredimo točku gdje se taj pravac siječe s preostalom silom P_3 i kroz tu točku crtamo rezultantu R , koju smo ranije dobili na planu sila.

Plan sila:

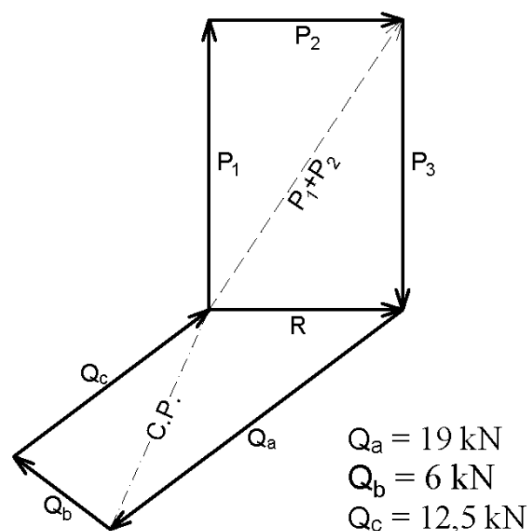
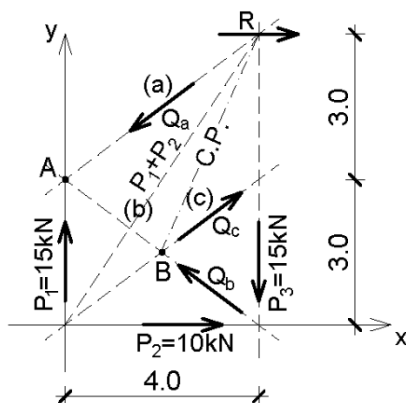
Poligon sila: MJ: 1 cm :: 2,5 kN



Sada primjenom Culmannove metode moramo dobivenu rezultantu R uravnotežiti sa silama na zadanim pravcima a , b i c . Na planu sila odredimo sjecište rezultante R s pravcem a te tu točku spojimo sa sjecištem pravaca b i c . Time smo dobili Culmannov pravac, koji zajedno s pravcem a prenosimo u poligon sila. Sada moramo rezultantu R uravnotežiti sa silom Q_a (koja leži na pravcu a) pomoću Culmannova pravca. Zatim prenosimo pravce b i c iz plana u poligon sila te pomoću Culmannova pravca odredimo sile Q_b i Q_c . Time smo rezultantu R uravnotežili sa silama Q_a , Q_b i Q_c . Na kraju na poligonu sila očitamo tražene sile pa pomoću definiranog mjerila odredimo njihove vrijednosti.

Plan sila:

Poligon sila: MJ: 1 cm :: 2,5 kN



4. Ravnoteža krutog tijela u ravnini

U mehanici je **kruto tijelo** idealizirani model tijela čije se **dimenzije i oblik ne mijenjaju** pod djelovanjem vanjskih sila. To znači da su **sve točke unutar tijela međusobno nepomične** – razmaci među njima ostaju stalni, bez obzira na opterećenje.

U stvarnosti, naravno, **sva su tijela deformabilna** – pa tako i svi konstrukcijski elementi. Međutim, deformacije u većini građevinskih elemenata (grede, stupovi, ploče...) pri uobičajenim su opterećenjima **vrlo male u odnosu na njihove dimenzije**, te ih u prvoj analizi možemo zanemariti.

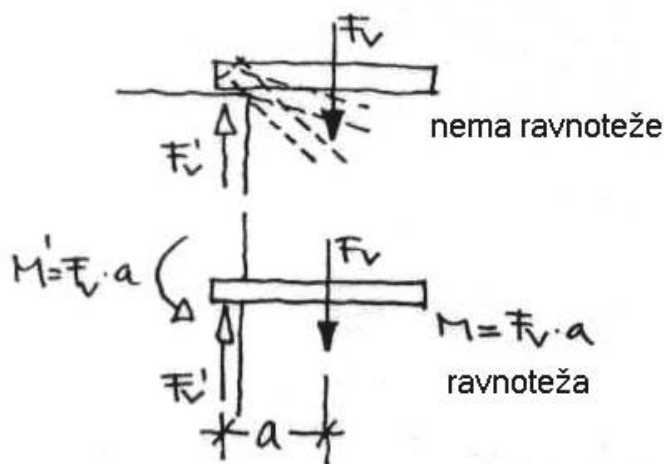
Zato u **statici** konstrukciju često tretiramo kao **skup krutih tijela**. Ova pretpostavka nam omogućuje primjenu **jednostavnijih matematičkih modela** – analiziraju se samo **pomaci i rotacije cijelog tijela kao cjeline**, a ne njegovo unutarnje deformiranje.

U daljnjim poglavljima analizirat ćemo kako se kruta tijela ponašaju pod djelovanjem sustava sila, kako se uspostavlja ravnoteža te koja je uloga ležajeva i reakcija u sprječavanju pomaka i rotacija.

4.1. Ležajevi konstrukcije: konzola i greda

U prethodnim poglavljima istaknuto je da se ravnoteža konstrukcijskih elemenata ostvaruje **reakcijama na ležajevima** (osloncima). Teoretski bi bilo moguće osigurati ravnotežu općeg sustava sila tako da se ležaj uvijek nalazi na pravcu rezultante opterećenja. No, u praksi to nije izvedivo jer su opterećenja na konstrukciju **promjenjiva tijekom vremena**, što znači da se **položaj rezultante stalno mijenja**. Prilagođavanje položaja ležaja tim promjenama nije moguće, pa je **nužno spriječiti rotaciju** na drugi način.

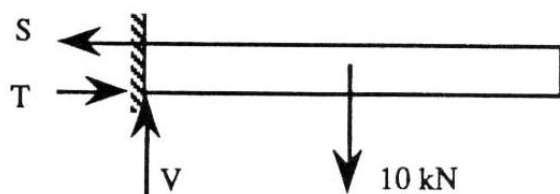
Zbog toga se koristimo **ležajevima koji osim translacije sprječavaju i rotaciju**. Takav ležaj nazivamo **upetim ležajem** ili **uklještenjem**. Osim što prenosi **horizontalnu i vertikalnu reakciju**, on može prenijeti i **reaktivni moment**, koji je nužan za sprječavanje rotacije sustava.



Slika 4.1. Upeti ležaj kao oslonac konzole

Konstruktivni element koji je na jednom kraju pričvršćen upetim ležajem naziva se **konzola**. U upetom kraju spriječene su:

- obje translacije (horizontalna i vertikalna)
- zakretanje, koje se sprječava djelovanjem sprega sila, prikazanog simbolično kao **reaktivni moment**.



Slika 4.2. Konzola s prikazanim reakcijama

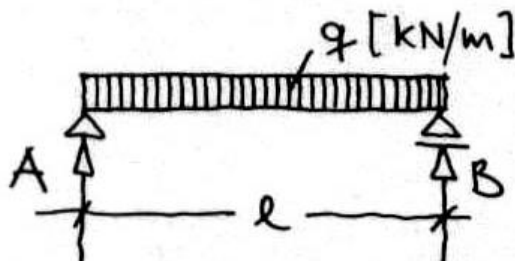
Iako upeti ležaj pruža potpunu statičku stabilnost, on je **tehnički najzahtjevniji** za izvedbu i nije uvijek praktičan, a osim toga ne mora biti ni prvi projektantski izbor. Ravnotežno stanje konstrukcijskog elementa moguće je ostvariti i **bez upetog ležaja**, korištenjem **kombinacije ležajeva koji sprječavaju isključivo translaciju**.

Na primjer (slika 4.3.):

- **Ležaj A** sprječava horizontalni i vertikalni pomak (*nepomični zglobni ležaj*).
- **Ležaj B** sprječava samo vertikalni pomak (*klizni ležaj*).

U ovom slučaju **vertikalna reakcija u točki B**, zajedno s reakcijama u A, **stvara spreg sila** koji sprječava rotaciju – time se ostvaruje ravnoteža bez reaktivnog momenta.

Takva konstrukcija naziva se **jednostavna greda** (*simple beam*).

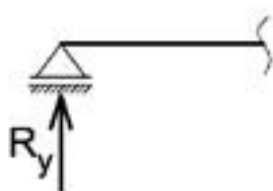


Slika 4.3. Greda oslonjena na nepomični i klizni ležaj

Ležajeve kojima se koristimo u analizama statike možemo podijeliti na tri osnovna tipa:

1) **Klizni (zglobni) ležaj:**

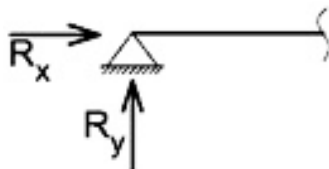
- sprječava pomake okomito na kliznu plohu
- omogućuje rotaciju i pomak u smjeru klizanja
- reakcija djeluje **okomito na kliznu plohu**.



Slika 4.4. Klizni (zglobni) ležaj – način označavanja i reakcija koju preuzima

2) Zglobni (nepomični) ležaj:

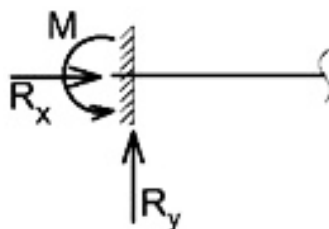
- sprječava horizontalne i vertikalne pomake
- omogućuje rotaciju
- razvija **horizontalnu i vertikalnu reakciju**.



Slika 4.5. Zglobni (nepomični) ležaj – način označavanja i reakcije koje preuzima

3) Upeti (ukliještjeni) ležaj:

- sprječava **sve pomake i rotaciju**
- razvija **horizontalnu, vertikalnu reakciju i reaktivni moment**.



Slika 4.6. Upeti (nepomični) ležaj – način označavanja i reakcije koje preuzima

4.2. Statički određeni i neodređeni nosači

Konzole i grede primjeri su **elementarnih konstrukcijskih sustava** u kojima su **tri moguća pomaka** (dvije translacije i jedna rotacija) spriječeni pomoću **triju reakcija**. Takvi sustavi nazivaju se **statički određeni**, jer se sve reakcije mogu **analitički izračunati** pomoću triju uvjeta ravnoteže koji su dani sljedećim izrazima:

a) Suma horizontalnih sila:

$$\sum X = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (4.1.)$$

b) Suma vertikalnih sila:

$$\sum Y = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (4.2.)$$

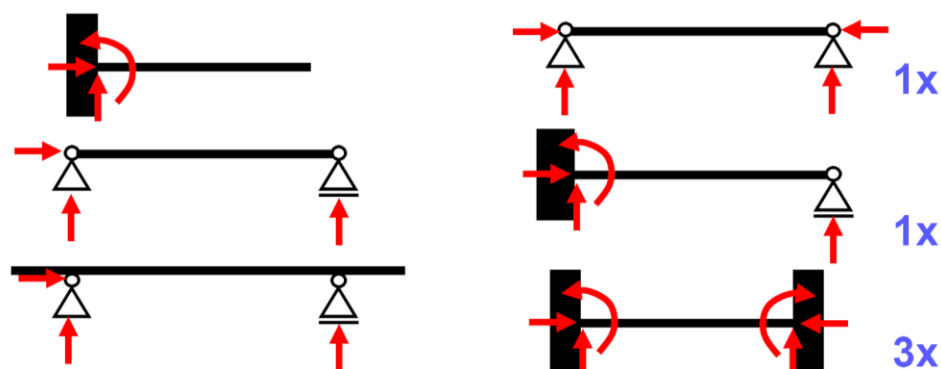
c) Suma momenata:

$$\sum M = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n M^i = 0 \quad (4.3.)$$

No, u praksi često susrećemo **statički neodređene nosače**, kod kojih broj reakcija **prelazi broj uvjeta ravnoteže**. Za njihovo rješavanje potrebni su **dodatni uvjeti** – primjerice uvjeti deformabilnosti (metode elastičnosti, pomaka, itd.).

Važno je naglasiti:

Bez obzira na to je li nosač statički određen ili neodređen, **svi mogući pomaci moraju biti spriječeni**. U suprotnom, element bi bio **nestabilan**.



Dovoljno za odrediti rješenje (3 j.r.):

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M = 0$$

Za riješiti statički neodređeni sustav potrebne su nam dodatne jednačbe.

Slika 4.7. Statički određene (lijevo) i statički neodređene konstrukcije (desno)

Iako jednostavni, **konzola i greda** često su **glavni elementi nosive konstrukcije**. Primjer takvog rješenja je **Most hrvatskih branitelja iz Domovinskog rata u Rijeci** (slika 4.8.), gdje su svi ključni elementi:

- glavni rasponski sklop – **greda**
- memorijal braniteljima – **dvije konzole**
- ograda i klupe – također **konzole**.



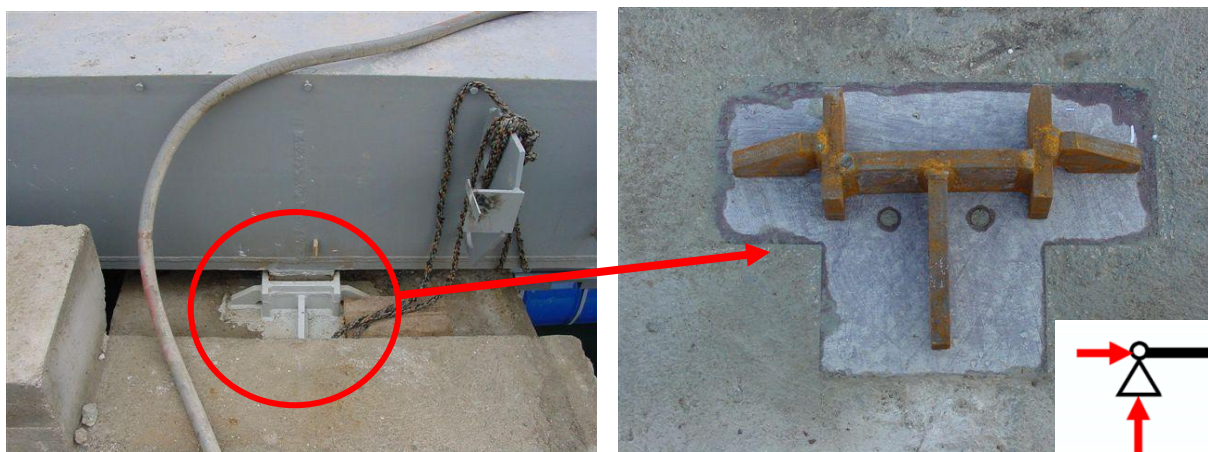
Slika 4.8. Most hrvatskih branitelja u Rijeci – elementi grede i konzole

Na istom mostu primijenjeni su **svi osnovni tipovi ležajeva**:

- zglobni nepomični
- klizni
- upeti ležaj.

Na slici 4.9. prikazano je jednostavno rješenje **nepomičnog zglobnog ležaja**. Umetanjem trna zavarenog na konstrukciju u prostor omeđen čeličnim pločama **spriječeno je horizontalno pomicanje**, dok je **rotacija dopuštena**.

Simbol **zglobnog nepomičnog ležaja** je **trokut s kružićem na vrhu** (slika 4.5.), ali u praksi takvi ležajevi mogu biti izvedeni na mnogo načina.



Slika 4.9. Most hrvatskih branitelja u Rijeci – izvedba nepomičnog zglobnog ležaja

Klizni ležaj simbolički se prikazuje kao nepomičan, ali **odvojen od podloge**, čime se prikazuje dopušteni **horizontalni pomak**. Na predmetnom mostu korišten je **elastomerni ležaj**, koji zahvaljujući svojoj elastičnosti omogućuje **ograničeno horizontalno pomicanje i zakretanje**.



Slika 4.10. Most hrvatskih branitelja u Rijeci – izvedba elastomernog kliznog ležaja

Drugi je korišten ležaj tzv. „**štapni**“ ležaj, element zglobno pričvršćen na oba kraja. On omogućuje **zakretanje u donjem zglobu**, što rezultira **horizontalnim pomakom u gornjoj točki**. Ovaj tip bit će detaljno objašnjen u poglavlju o **konstruktivnim sustavima**.



Slika 4.11. Most hrvatskih branitelja u Rijeci – izvedba štapnog (kliznog) ležaja

Upeti ležaj simbolizira potpuno ukrućenje elementa. Na slici 4.12. upetost je ostvarena kombinacijom **vertikalnih reakcija elastomera i štapa** – njihovo zajedničko djelovanje osigurava **sprečavanje pomaka i rotacije**.



Slika 4.11. Most hrvatskih branitelja u Rijeci – izvedba upetog ležaja kombinacijom elastomernog nepomičnog i štapnog (kliznog) ležaja

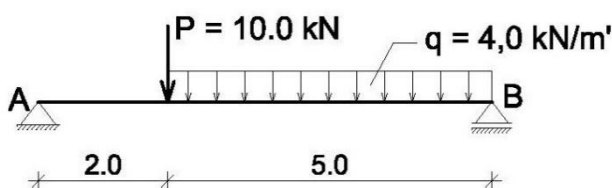
4.3. Određivanje reakcija u ležajevima

Da bi kruto tijelo bilo u ravnoteži, mora imati **dovoljan broj pravilno raspoređenih ležajeva** koji sprječavaju sve moguće pomake – dvije translacije i rotaciju. Prvi korak u analizi ravnoteže jest **određivanje reakcija na ležajevima** jer one nadoknađuju djelovanje vanjskih sila i osiguravaju statičku stabilnost tijela.

Reakcije se određuju **primjenom analitičkih i grafičkih uvjeta ravnoteže općeg sustava sila u ravnini**, odnosno koristeći jednačbe za zbroj sila i zbroj momenata.

U nastavku slijede **riješeni primjeri** određivanja reakcija na ležajevima **primjenom analitičkih i grafičkih uvjeta ravnoteže općeg sustava sila u ravnini**. Na primjerima će se najbolje prikazati način primjene teorijskog dijela iz 3. poglavlja na rješavanju zadaće određivanja reakcija realnih jednostavnih konstrukcijskih sustava krutih tijela.

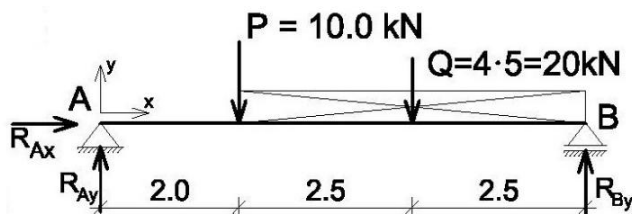
4.3.1. Određivanje reakcija u ležajevima - 1. primjer



Treba odrediti reakcije (uravnotežiti sile) na zadanom sustavu.

1) Analitički postupak

Zadana je jednostavna greda. Postavimo koordinatni sustav tako da nam je os x u smjeru grede AB i pretpostavimo reakcije u osloncima A i B . Kako je oslonac A nepomični zglobovi ležaj, u njemu pretpostavljamo horizontalnu R_{Ax} i vertikalnu reakciju R_{Ay} , dok u osloncu B , koji je klizni ležaj, pretpostavljamo samo vertikalnu reakciju R_{By} . Nadalje, zamijenimo kontinuirano opterećenje q s koncentriranom silom Q , koja predstavlja rezultantu djelovanja kontinuiranog opterećenja q . Zamjenjujuća sila Q djeluje u težištu djelovanja kontinuiranog opterećenja te ima iznos koji je jednak umnošku zadanog kontinuiranog opterećenja q i dužine na kojoj to opterećenje djeluje, dakle: $Q = q \cdot 5,0 = 20,0 \text{ kN}$.



Kako bismo odredili reakcije, sada primijenimo analitičke uvjete ravnoteže (izrazi 4.1. - 4.3.):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M^i = 0.$$

Prvi izraz za sumu horizontalnih sila daje nam vrijednost horizontalne reakcije R_{Ax} :

$$\sum F_x = 0$$

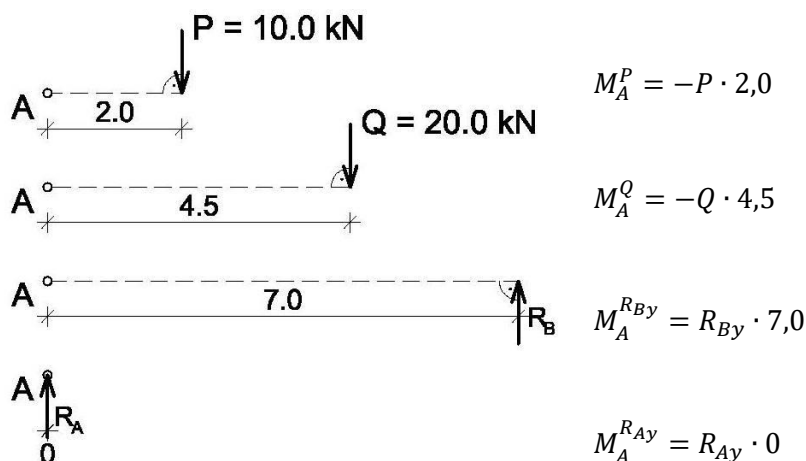
$$R_{Ax} = 0.$$

Drugi izraz za sumu vertikalnih sila nam daje jednadžbu s dvjema nepoznanicama koju za sad nećemo upotrijebiti:

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} - P - Q = 0.$$

Vrijednosti vertikalnih reakcija određujemo preko trećeg izraza za sumu momenata, i to na točku oslonca A , pa zatim na točku oslonca B . Prisjetimo se kako je moment sile umnožak sile i okomite udaljenosti pravca njezina djelovanja od točke na koju taj moment djeluje. Stoga prilikom izračuna momenta na točku A računavamo utjecaj svih sila koje izazivaju moment na tu točku, kako je detaljno prikazano u nastavku.



$$\sum M_A = 0$$

$$R_{By} \cdot 7,0 - P \cdot 2,0 - Q \cdot 4,5 = 0$$

$$R_{By} = \frac{10,0 \cdot 2,0 + 20,0 \cdot 4,5}{7,0} = 15,71 \text{ kN}$$

Dalje po istom principu računamo sumu momenta na točku B.

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_{Ay} \cdot 7,0 + P \cdot 5,0 + Q \cdot 2,5 = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{10,0 \cdot 5,0 + 20,0 \cdot 2,5}{7,0} = 14,29 \text{ kN}$$

Time smo odredili sve reakcije i još na kraju možemo upotrijebiti izraz kojim se nismo ranije koristili, a koji nam služi za kontrolu izračuna.

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} - P - Q = 14,29 + 15,71 - 10,0 - 20,0 = 0$$

2) Grafički postupak

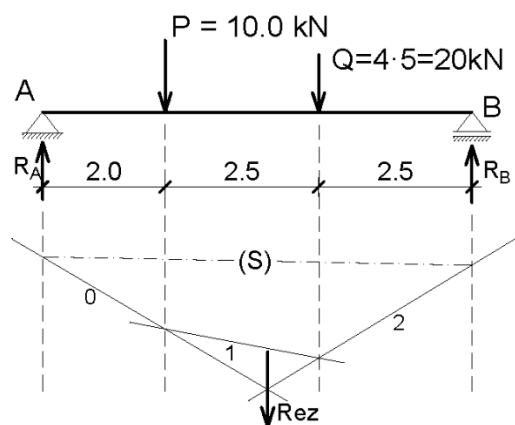
Kada zadatak rješavamo grafičkim postupkom, uočimo da su sile P i Q vertikalne, te reakcija R_B mora biti vertikalna (zbog definiranog tipa ležaja). Kako su sve sile vertikalne, i reakcija R_A također mora biti vertikalna. Budući da se sile ne sijeku u konačnosti, za rješavanje moramo primijeniti verižni poligon.

Najprije crtamo sile u poligonu sila prenoseći paralele iz plana sila (pomoću dvaju trokuta), crtajući dužine sila sukladne veličini sila i definiranim mjerilom. Zatim prelazimo na crtanje verižnog poligona. Najprije na poligonu sila proizvoljno odaberemo pol verižnog poligona i crtamo zrake kao spojnice svih početaka i krajeva sila s odabranim polom te zrake numeriramo brojevima od 0 do 2. Na planu sila produžimo pravce djelovanja sila te prenesemo zrake paralelno (pomoću dvaju trokuta) iz poligona sila. Početnu zraku 0 postavljamo proizvoljno na planu sila pa zatim crtamo zraku 1 kroz točku u kojoj se sijeku početna zraka 0 i pravac sile P . Zatim nađemo sjecište zrake 1 s pravcem sile Q i kroz tu točku crtamo zraku 2. Sada možemo produžiti pravce zraka 0 i 2, pronađemo njihovo sjecište i kroz tu točku prolazi rezultanta R .

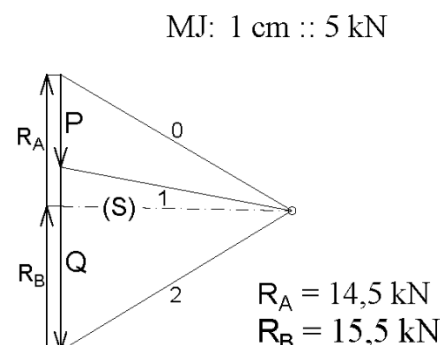
Sama rezultanta nam nije potrebna za daljnje rješavanje zadatka, no znamo da reakcije R_A i R_B moraju biti u ravnoteži s njom. Stoga odredimo sjecišta prve zrake s pravcem reakcije R_A i zadnje

zrake s pravcem reakcije R_B te spojimo ta sjecišta. Dobiveni pravac S prenesemo u poligon sila kroz pol verižnog poligona. Time smo dobili reakcije R_A i R_B , pa očitamo njihove dužine i pomoću mjerila preračunamo u veličinu sila.

Plan sila:

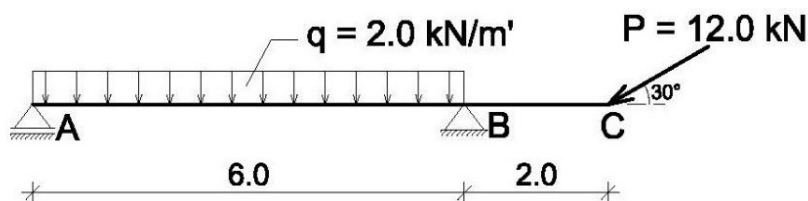


Poligon sila:



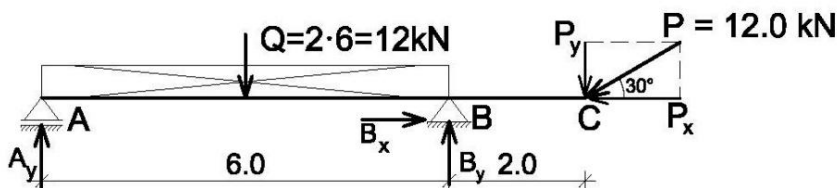
4.3.2. Određivanje reakcija u ležajevima – 1. primjer

Odrediti reakcije na zadanom sustavu:



1) Analitički postupak

Zadana je greda s jednostranim prepustom. Najprije pretpostavimo orijentacije reaktivnih sila. Možemo ih orijentirati u skladu s koordinatnim osima, no ako možemo, bolje je pretpostaviti stvarnu orijentaciju reakcija. Kako je oslonac A klizni ležaj, u njemu može postojati samo vertikalna reakcija A_y , a s obzirom na opterećenje za očekivati je kako će biti orijentirana prema gore. S druge strane u osloncu B, koji je nepomični zglobovi ležaj, pretpostavljamo horizontalnu B_x i vertikalnu reakciju B_y . Vertikalna će reakcija opet biti orijentirana prema gore, dok će horizontalna reakcija biti orijentirana udesno, suprotno od djelovanja horizontalne komponente sile P . Nadalje, zamijenimo kontinuirano opterećenje q s koncentriranom silom Q , koja predstavlja rezultantu djelovanja i djeluje u težištu kontinuiranog opterećenja q . Silu P rastavimo na horizontalnu i vertikalnu komponentu.



$$P_x = P \cdot \cos 30^\circ = 10,39 \text{ kN}$$

$$P_y = P \cdot \sin 30^\circ = 6,0 \text{ kN}$$

Za određivanje reakcija primijenimo analitičke uvjete ravnoteže. Najprije preko sume horizontalnih sila odredimo horizontalnu komponentu reakcije B.

$$\sum F_x = 0$$

$$B_x - P_x = 0$$

$$B_x = 10,39 \text{ kN}$$

Iznose vertikalnih reakcija određujemo preko izraza za sumu momenata, najprije na točku oslonca A pa zatim na točku oslonca B.

$$\sum M_A = 0$$

$$B_y \cdot 6,0 - Q \cdot 3,0 - P_y \cdot 8,0 = 0$$

$$B_y = \frac{12,0 \cdot 3,0 + 6,0 \cdot 8,0}{6,0} = 14,0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-A_y \cdot 6,0 + Q \cdot 3,0 - P \cdot 2,0 = 0$$

$$A_y = \frac{12,0 \cdot 3,0 - 6,0 \cdot 2,0}{6,0} = 4,0 \text{ kN}$$

Na kraju provjerimo vrijednosti vertikalnih reakcija preko izraza za sumu vertikalnih sila.

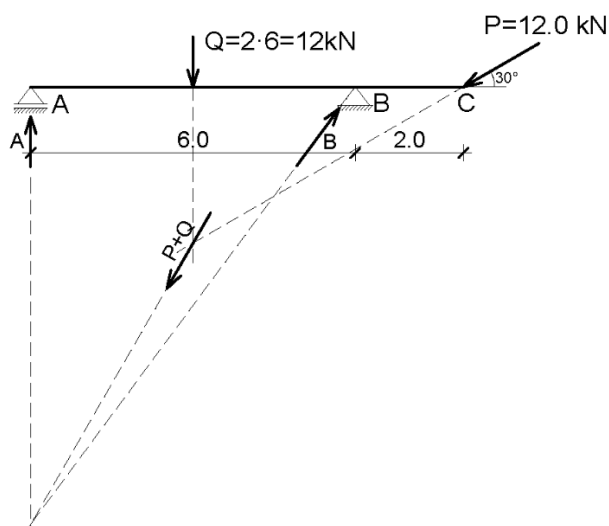
$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - Q - P_y = 4,0 + 14,0 - 12,0 - 6,0 = 0$$

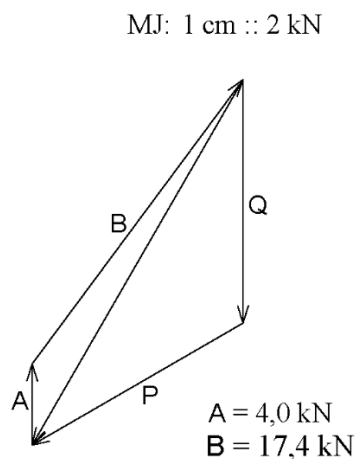
2) Grafički postupak

Ako zadatak rješavamo grafičkim postupkom, uočimo kako imamo dvije poznate i dvije nepoznate sile, kojima možemo pronaći sjecište. Stoga, kako bismo primijenili grafički uvjet ravnoteže, moramo sustav svesti na tri sile. Navedeno možemo napraviti tako da pronađemo rezultantu sila P i Q. Dobivena rezultanta mora se sjeći s preostalim silama (reakcijama) u istoj točki i zatvarati poligon sila. Odredimo sjecište pravaca poznatih sila, reakcije A koja mora biti vertikalna zbog tipa ležaja i dobivene rezultante P + Q. Preostala reakcija B mora prolaziti kroz to sjecište i točku oslonca. Prenesemo dobivene pravce reakcija A i B u poligon sila pa očitamo njihove dužine i pomoću mjerila preračunamo u vrijednosti reakcija.

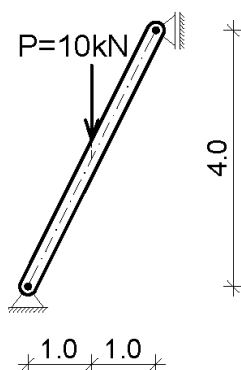
Plan sila:



Poligon sila:



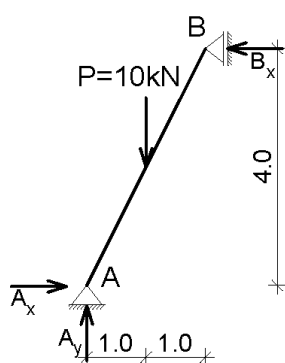
4.3.3. Određivanje reakcija u ležajevima – 3. primjer



Treba odrediti reakcije na zadanom sustavu:

- 1) analitičkim postupkom
- 2) grafičkim postupkom.

1) Analitički postupak



Zadani element, odnosno kosu gredu prikažimo shematski linijom koja predstavlja os zadanog elementa. Oslonac A nepomični je zglobovi ležaj, pa u njemu nastaju horizontalna i vertikalna reakcija A_x i A_y . Oslonac B klizni je ležaj koji ima definiranu kliznu plohu u vertikalnom smjeru, što znači da je spriječen horizontalni pomak, pa nastaje samo horizontalna reakcija B_x . Pretpostavimo orijentaciju navedenih reakcija i upotrijebimo analitičke uvjete ravnoteže kako bismo ih izračunali.

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - P = 0$$

$$A_y = 10,0 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$B_x \cdot 4,0 - P \cdot 1,0 = 0$$

$$B_x = \frac{P}{4,0} = 2,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x - B_x = 0$$

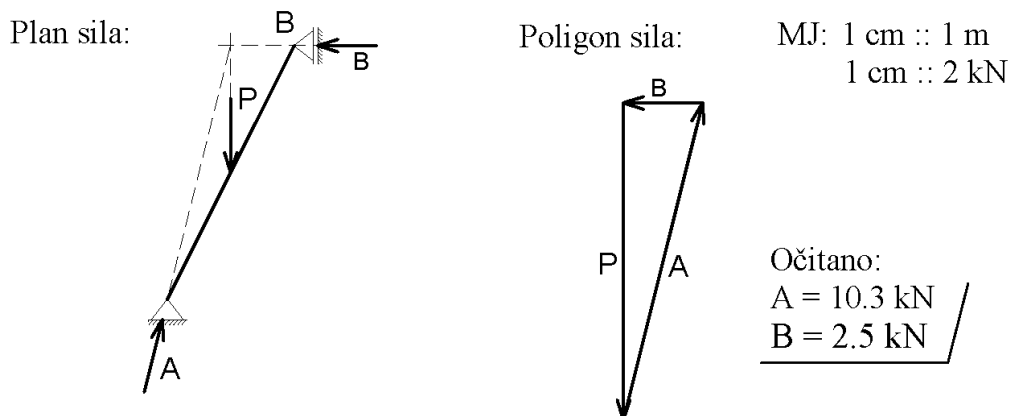
$$A_x = 2,5 \text{ kN}$$

2) Grafički postupak

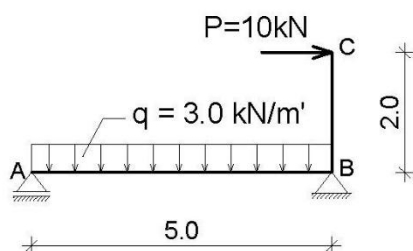
Najprije crtamo plan sila definiranim mjerilom. Uočimo kako imamo jednu poznatu silu i dvije nepoznate sile od kojih jednoj znamo pravac na kojem djeluje. Stoga primjenjujemo grafički uvjet ravnoteže koji kaže da su tri sile u ravnoteži kada se sijeku u istoj točki i zatvaraju poligon sila. Odredimo sjecište pravaca poznatih sila P i B , a preostala sila, odnosno reakcija A mora prolaziti kroz to sjecište i točku oslonca. Time smo dobili pravac reakcije A , pa prelazimo u

poligon sila. Nacrtamo poznatu silu P u skladu s definiranim mjerilom te u poligon sila prenesemo pravce preostalih sila A i B (paralelno, pomoću dvaju trokuta).

Kada smo odredili trokut sila koji zatvaraju pravci P , A i B , odredimo orijentacije reakcija te očitamo njihove dužine i pomoću mjerila preračunamo u vrijednosti reakcija A i B . Na kraju prenesemo orijentacije reakcija u plan sila.



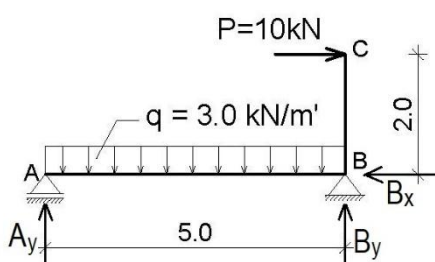
4.3.4. Određivanje reakcija u ležajevima – 4. primjer



Treba odrediti reakcije na zadanom sustavu:

- 1) analitičkim postupkom
- 2) grafičkim postupkom.

1) Analitički postupak



$$\sum F_x = 0$$

$$-B_x + P = 0$$

$$B_x = 10,0 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$B_y \cdot 5,0 - P \cdot 2,0 - q \cdot 5,0 \cdot 2,5 = 0$$

$$B_y = \frac{10,0 \cdot 2,0 + 3,0 \cdot 5,0 \cdot 2,5}{5,0} = 11,5 \text{ kN}$$

Pretpostavimo reakcije i upotrijebimo analitičke uvjete ravnoteže. Kontinuirano opterećenje q nije na skici zamijenjeno s koncentriranom silom Q , no u proračunu radimo s tom silom $Q = q \cdot 5,0$, koja djeluje u težištu kontinuiranog opterećenja q .

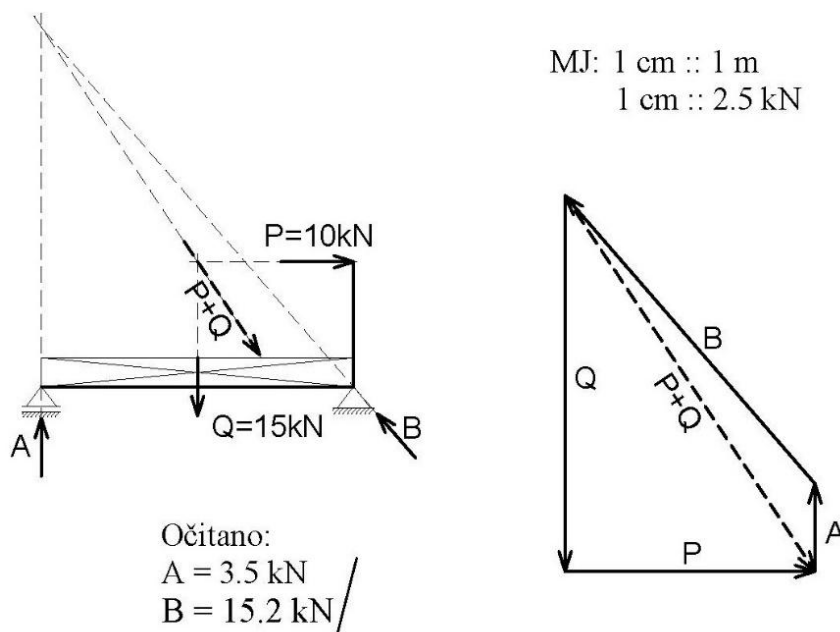
$$\Sigma M_B = 0$$

$$-A_y \cdot 5,0 - P \cdot 2,0 + q \cdot 5,0 \cdot 2,5 = 0$$

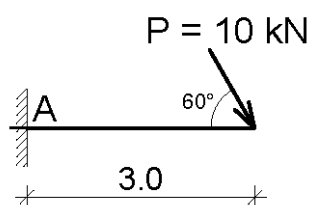
$$A_y = \frac{-10,0 \cdot 2,0 + 3,0 \cdot 5,0 \cdot 2,5}{5,0} = 3,5 \text{ kN}$$

2) Grafički postupak

Prilikom rješavanja zadatka grafičkim postupkom moramo kontinuirano opterećenje q zamijeniti s koncentriranom silom $Q = q \cdot 5,0 = 15,0 \text{ kN}$, koja djeluje u težištu kontinuiranog opterećenja q . Uočimo kako imamo dvije poznate i dvije nepoznate sile, kojima možemo pronaći sjecište. Stoga, kako bismo primijenili grafički uvjet ravnoteže, moramo sustav svesti na tri sile. Navedeno možemo napraviti tako da pronađemo rezultantu sila P i Q . Dobivena rezultanta mora se sjeći s preostalim silama (reakcijama) u istoj točki i zatvarati poligon sila. Odredimo sjecište pravaca poznatih sila, reakcije A koja mora biti vertikalna zbog tipa ležaja i dobivene rezultante $P+Q$. Preostala reakcija B mora prolaziti kroz to sjecište i točku oslonca. Prenesemo dobivene pravce reakcija A i B u poligon sila pa očitamo njihove dužine i pomoću mjerila preračunamo u vrijednosti reakcija.



4.3.5. Određivanje reakcija u ležajevima – 5. primjer

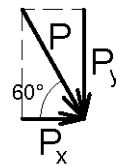
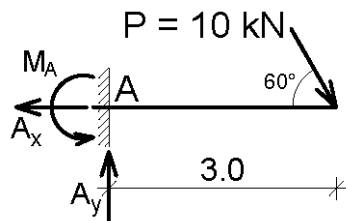


Treba odrediti reakcije na zadanom sustavu analitičkim postupkom.

Najprije moramo pretpostaviti reakcije kako bismo ih izračunali. Kako je oslonac A upeti ležaj, moramo pretpostaviti horizontalnu A_x i vertikalnu reakciju A_y i moment upetosti M_A . Ispravnu orijentaciju reakcija dobivamo tako da zamislimo kako oslonac na tren dopušta spriječen pomak, utvrdimo u kojem smjeru bi se pritom pomaknula ili zarotirala točka oslonca, pa će reakcija djelovati u suprotnom smjeru. Silu P rastavimo na komponente P_x i P_y , pa možemo izračunati reakcije upotrebom analitičkih uvjeta ravnoteže.

$$P_x = P \cdot \cos 60^\circ = 5,0 \text{ kN}$$

$$P_y = P \cdot \sin 60^\circ = 8,66 \text{ kN}$$



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$P_x - A_x = 0$$

$$A_y - P_y = 0$$

$$A_x = P_x = 5,0 \text{ kN}$$

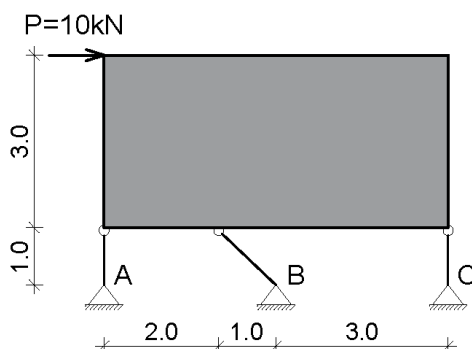
$$A_y = P_y = 8,66 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - P_y \cdot 3,0 = 0$$

$$M_A = 8,67 \cdot 3,0 = 26,0 \text{ kNm}$$

4.3.6. Određivanje reakcija u ležajevima – 6. primjer

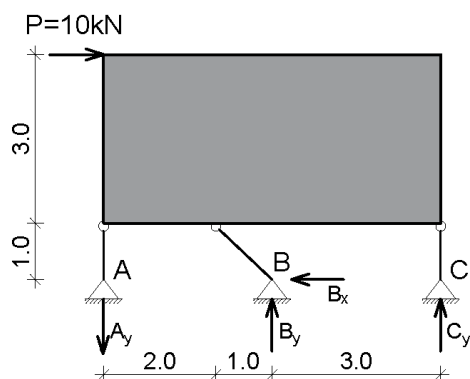


Treba odrediti reakcije na zadanom sustavu:

- 1) analitičkim postupkom
- 2) grafičkim postupkom.

1) Analitički postupak

Zadano tijelo u ravni je pridržano s trima vezama i osloncima A, B i C. Kako veze možemo smatrati štapovima, zaključujemo da u osloncu A i C mogu postojati samo vertikalne reakcije, dok u osloncu B postoje vertikalna i horizontalna reakcija.



Kod ovakvog zadatka bitno je krenuti s izračunom na ispravan način kako si ne bismo nepotrebno zakomplicirali daljnji rad. Uočimo kako je zadana horizontalna sila P, a samo u osloncu B imamo horizontalnu komponentu reakcije, pa jednostavno dolazimo do vrijednosti reakcije B_x . Nadalje, kako se veza, odnosno štap, u osloncu B priključuje pod kutom 45° , vrijednosti horizontalne i vertikalne komponente reakcije B moraju biti jednake.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$P - B_x = 0$$

$$B_x = P = 10,0 \text{ kN}$$

$$B_y = B_x = 10,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$B_y \cdot 3,0 + C_y \cdot 6,0 - P \cdot 4,0 = 0$$

$$C_y = \frac{-10,0 \cdot 3,0 + 10,0 \cdot 4,0}{6,0} = 1,67 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$A_y \cdot 6,0 - B_y \cdot 3,0 - P \cdot 4,0 = 0$$

$$A_y = \frac{10,0 \cdot 3,0 + 10,0 \cdot 4,0}{6,0} = 11,67 \text{ kN}$$

Kontrola proračuna:

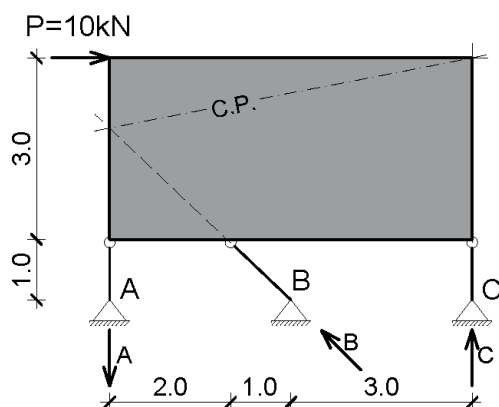
$$\Sigma F_y = 0$$

$$B_y + C_y - A_y = 10 + 1,67 - 11,67 = 0$$

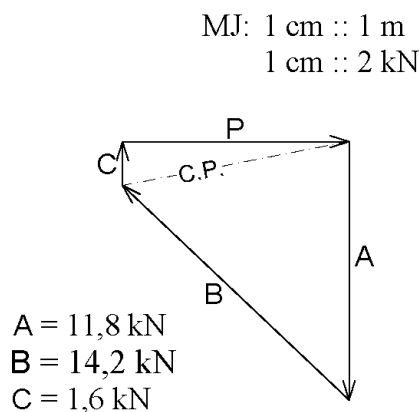
2) Grafički postupak

Imamo jednu poznatu i tri nepoznate sile kojima znamo pravac na kojem djeluju, pa zadatak rješavamo primjenom Culmannove metode. Na planu sila odredimo sjecište sile P s pravcem reakcije C te tu točku spojimo sa sjecištem reakcija A i B . Time smo dobili Culmannov pravac (označen s $C.P.$), koji zajedno sa silom P prenosimo u poligon sila. Zatim prenesemo pravac reakcije C i zatvorimo trokut sila P i C s Culmannovim pravcem. Zatim prenosimo pravce reakcija A i B iz plana u poligon sila te pomoću definiranog odsječka na Culmannovu pravcu zatvaramo poligon sila. Time smo dobili konačni oblik poligona sila, s orijentacijama sila koje prate jedna drugu počevši od zadane sile P . Na kraju na poligonu sila očitamo dobivene reakcije i pomoću definiranog mjerila odredimo njihove vrijednosti te prenesemo orijentacije reakcija A , B i C na plan sila.

Plan sila:



Poligon sila:



5. Unutarnje sile

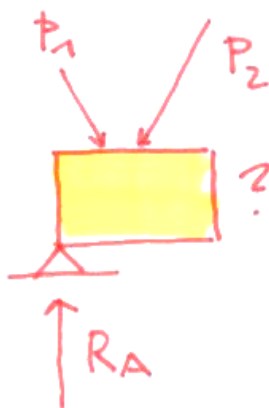
5.1. Općenito o unutarnjim silama

U statičkoj analizi konstrukcija prvi je korak razumijevanje kako **opterećenje** djeluje na konstrukcijske elemente. To opterećenje u mehanici nazivamo **akcijom**. Da bi konstruktivni element ostao u mirovanju (ravnoteži), na osloncima moraju djelovati **reakcije** koje poništavaju djelovanje akcije.

Kada su akcije i reakcije međusobno uravnotežene, tj. kada su zadovoljeni **uvjeti ravnoteže**, tada je i sam element u ravnotežnom stanju. Ovo je **prvi i temeljni uvjet** stabilnosti svakog konstrukcijskog elementa. Ako je taj uvjet ispunjen za sve pojedinačne elemente, tada možemo reći da je i cijela konstrukcija u ravnoteži.

Ali to nije dovoljno. **Drugi ključni uvjet** koji svaki konstruktivni element mora ispuniti je **nosivost** – njegova sposobnost da bez oštećenja ili loma podnese naprezanja koja nastaju uslijed djelovanja opterećenja. Opterećenje uzrokuje **deformacije** elemenata, a unutar materijala se razvijaju **naprezanja**. Element mora, zahvaljujući svojim geometrijskim i materijalnim karakteristikama, biti sposoban „prenijeti” opterećenje na svoje oslonce kako bi se ravnoteža uopće mogla ostvariti. Drugim riječima, nastalo naprezanje mora biti manje od čvrstoće materijala jer bi u suprotnom došlo do loma.

Kako bismo razumjeli raspodjelu sila unutar konstrukcije, u analizi se često koristimo postupkom tzv. **mentalnog presjeka** – zamišljamo da „režemo” element na dva dijela i analiziramo jedan od njih. Ključno je da i taj **izrezani dio** mora ostati u ravnoteži. To je moguće samo ako se u mjestu presjeka pojave unutarnje sile koje nadomještaju utjecaj uklonjenog dijela konstrukcije.



Slika 5.1. Izolacija dijela konstrukcije za analizu – načelo „rezanja“

No, ne možemo samo fizički „odrezati” dio konstrukcije i zaključiti da je sve u ravnoteži. Klasičan primjer s gredom i osobom koja reže granu na kojoj sjedi ilustrira da su pojedini dijelovi u ravnoteži samo dok su povezani (slika 5.2.). Odrezani dijelovi su se „držali” zajedno, ali su rezanjem veze između njih presječene. Prema tome, ravnotežno stanje odabranog dijela konstruktivnog elementa može biti ostvareno tek s veznim silama u presjeku koje predstavljaju utjecaj uklonjenog dijela. Kad se veza presiječe, pojavljuje se reakcija koju smo zanemarili – u ovom slučaju, osoba pada. Time zaključujemo da **mehanička veza** između dijelova konstrukcije mora biti zamijenjena **silama u presjeku** koje predstavljaju utjecaj odvojenog dijela.

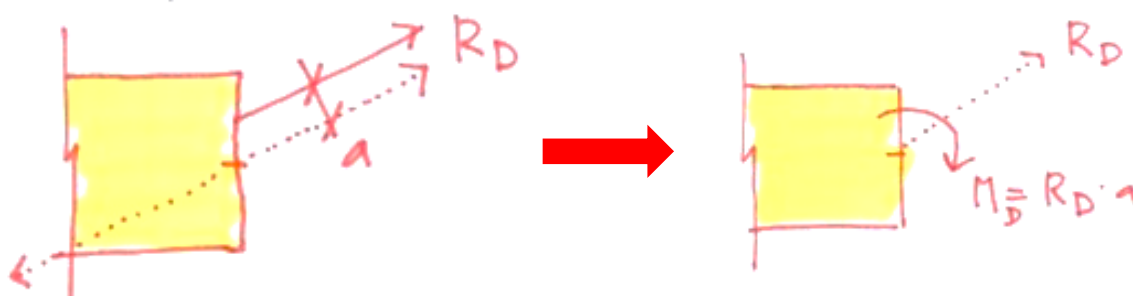


Slika 5.2. Reže granu na kojoj sjedi – gubitak ravnoteže zbog prekida mehaničke veze

Te se sile nazivaju **unutarnje sile** i njihov točan raspored i položaj mogu biti različiti. Ako te sile u presjeku zamijenimo rezultantom, očito je da ona može biti u bilo kojoj točki presjeka i pod bilo kojim kutom djelovanja. Želimo li da nam rezultanta sile u presjeku bude kriterij za ocjenu nosivosti, jasno da je gotovo nemoguće uspostaviti jedinstveni kriterij za beskonačan broj mogućih rješenja za rezultantu. Iz tog razloga svodimo rješenje na unaprijed odabranu točku presjeka: njegovo težište. Paralelnim „premještanjem“ rezultante u težište veličina sile ostaje ista, ali zbog postojanja kraka između stvarnog položaja sile i težišta ekvivalentno rješenje dobivamo tek kada u težištu uz silu postoji i moment jednak umnošku rezultante i njezine udaljenosti od težišta (kraka).

Dakle, radi praktičnosti u analizi, sve sile koje nastaju u presjeku svodimo na jednu **rezultantnu silu** i pripadajući **moment** u točki koju definiramo kao **težište presjeka**.

Zašto u težištu? Jer je to matematički i konceptualno najprikladnije mjesto koje nam omogućuje standardiziranu analizu – sve sile koje nisu u toj točki možemo „preseliti“ tamo ako im dodamo odgovarajući moment. Taj moment nadoknađuje **efekt kraka** između stvarnog položaja sile i točke analize.



Slika 5.3. Ravnotežno stanje uz silu i moment u težištu presjeka

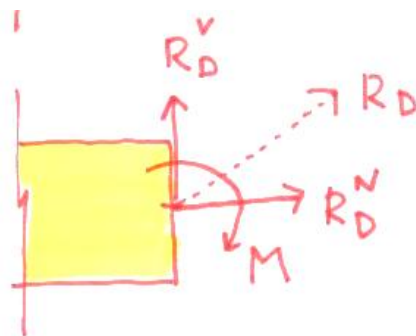
Alternativno, možemo u težište presjeka dodati dvije jednake i suprotno usmjerene sile (koje se međusobno poništavaju). One ne mijenjaju ukupnu silu, ali omogućuju da se sila analizira kao kombinacija rezultantne sile i momenta u točno određenoj točki.

Rezultantna sila tada se rastavlja na dvije osnovne komponente:

- **komponentu uz os elementa** – zovemo je **uzdužna ili normalna sila (N)**
- **komponentu okomitu na os** – zovemo je **poprečna sila (V)**.

Moment koji djeluje u ravnini presjeka nazivamo **moment savijanja (M)**.

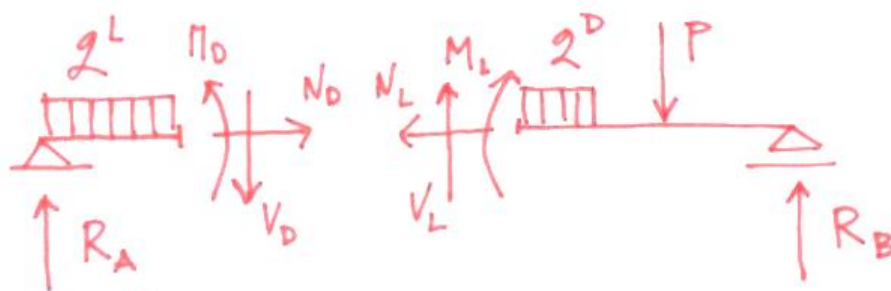
Ove tri veličine – **N**, **V** i **M** – čine osnovne **unutarnje sile**. One u potpunosti opisuju kako se opterećenje prenosi kroz presjek nekog konstrukcijskog elementa.



Slika 5.4. Unutarnje sile u presjeku elementa: N – uzdužna, V – poprečna, M – moment savijanja

Unutarnje sile održavaju ravnotežu promatranog dijela konstrukcije. Njihove vrijednosti određuju se primjenom uvjeta ravnoteže na „izrezani“ dio. Ovisno o tome promatramo li lijevu ili desnu stranu presjeka, orijentacija i oznake sila se mijenjaju. Primjerice, ako analiziramo **lijevu stranu**, desnu zamjenjujemo s odgovarajućim unutarnjim silama: N_D , V_D , M_D . Ako promatramo **desnu stranu**, uvodimo N_L , V_L , M_L . Budući da je riječ o međusobno povezanim dijelovima konstrukcije, unutarnje sile na obje strane presjeka (analizirana i „odbačena“ strana) također moraju biti međusobno u ravnoteži, tj. unutarnje sile u presjeku moraju biti:

- **jednake po veličini,**
- **suprotno usmjerene.**



Slika 5.5. Unutarnje sile na lijevoj i desnoj strani zamišljenog presjeka – međusobna ravnoteža

5.2. Pravila za određivanje i crtanje dijagrama unutarnjih sila

Za svaku unutarnju silu (N, V, M) postoji presjek u kojem ta sila postiže svoju **maksimalnu vrijednost**. Taj presjek nazivamo **mjerodavnim** za tu silu jer određuje koliko mora biti otporan materijal, kakav mora biti presjek, itd.

Kako bismo pronašli te mjerodavne vrijednosti, koristimo se **dijagramima unutarnjih sila**. To su grafički prikazi koji prikazuju kako se određena sila mijenja duž duljine konstrukcijskog elementa.

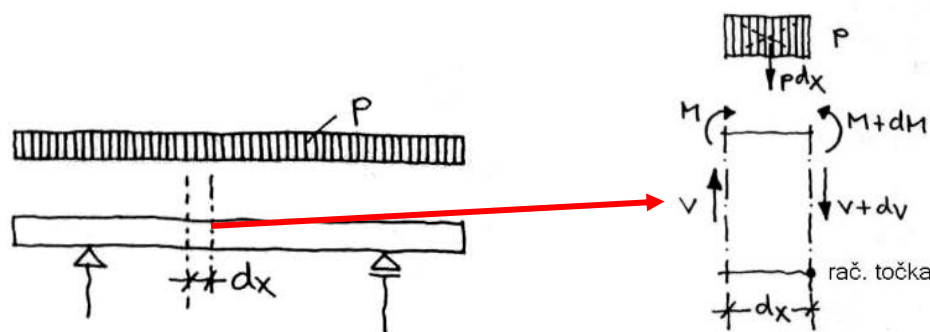
Za izradu dijagrama unutarnje sile računamo u nekoliko **karakterističnih presjeka**, najčešće:

- na osloncima
- na mjestima gdje djeluju koncentrirane sile ili momenti
- na mjestima gdje se mijenja poprečni presjek elementa.

Dobivene vrijednosti prikazuju se u mjerilu:

- **uzdužna sila** - $N(x)$ i **poprečna sila** - $V(x)$ crtaju se **okomito** na uzdužnu os elementa – **pozitivne iznad, negativne ispod**
- **moment savijanja** - $M(x)$ se uobičajeno crta **ispod** osi elementa kada je pozitivan (otvara element prema gore).

Za pravilno razumijevanje i crtanje dijagrama, posebno je važno razumjeti **vezu između opterećenja, poprečne sile i momenta** i njihove matematičke odnose. „Izrežemo“ li mali segment (duljine dx) nosača sa slike 5.6., i s dM i dV označimo promjenu veličine momenta savijanja i poprečne sile između lijevog i desnog presjeka te postavimo uvjete ravnoteže za taj segment, slijedi da je promjena poprečne sile dV na dužini dx jednaka intenzitetu opterećenja i da je promjena momenta dM jednaka veličini poprečne sile.



Slika 5.6. Odnos između opterećenja, poprečne sile i momenta

Prethodno navedeno i prikazano na slici 5.6. matematički se može napisati:

$$\sum F_y = 0 \quad (5.1.)$$

$$V - (V + dV) - q \cdot dx = 0 \quad (5.2.)$$

$$-dV = q \cdot dx \quad (5.3.)$$

$$\underline{dV / dx = -q} \quad (5.4.)$$

$$\sum M = 0 \quad (5.5.)$$

$$M - (M + dM) + V \cdot dx - q \cdot dx \cdot dx / 2 = 0 \quad (5.6.)$$

$$-dM + V \cdot dx - q \cdot (dx)^2 / 2 = 0 \quad (5.7.)$$

$$-dM + V \cdot dx = 0 \quad (5.8.)$$

$$\underline{dM / dx = V} \quad (5.9.)$$

Pojednostavljenim matematičkim jezikom možemo reći da je opterećenje derivacija (odnosno promjena) poprečne sile, dok je poprečna sila derivacija momenta savijanja:

- opterećenje je derivacija poprečne sile: $dV / dx = -q(x)$ (5.10.)

- poprečna sila je derivacija momenta: $dM / dx = V(x)$. (5.11.)

Kako nam to pomaže pri crtanju dijagrama unutarnjih sila?

Ako znamo kako se funkcije ponašaju pri deriviranju, možemo zaključiti sljedeće:

- derivacijom **parabole** dobijemo **pravac**
- derivacijom **pravca** dobijemo **konstantu**
- derivacijom **konstante** dobijemo **nulu**.

Na temelju toga možemo reći:

- ako je opterećenje konstantno (npr. ravnomjerno), tada će se **poprečna sila mijenjati linearno**, a **moment savijanja parabolično**
- ako na dijelu nosača **nema opterećenja** ($q = 0$), tada je **poprečna sila konstantna**, a **moment se mijenja pravocrtno**.

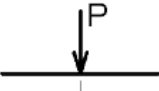
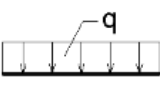
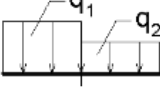
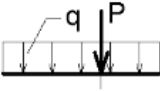
Što je veći intenzitet opterećenja, brže se mijenja poprečna sila, odnosno **nagib** dijagrama sile je veći. Slično tome, veća poprečna sila uzrokuje bržu promjenu momenta, što znači da je **nagib tangente** dijagrama momenta izraženiji.

Na mjestu djelovanja **koncentrirane sile** (vanjske sile ili reakcije), u **dijagramu poprečnih sila** uvijek se javlja **skok** jednak veličini te sile. U **dijagramu momenta savijanja** na istom se mjestu pojavljuje **lom** – zbog promjene vrijednosti poprečne sile s lijeve i desne strane presjeka mijenja se nagib pravca momentnog dijagrama.

Prethodno navedeno dodatno je prikazano u tablici 5.1. i na slici 5.7.

Tablica 5.1. *Veza između opterećenja, poprečne sile i momenta savijanja*

Opterećenje (q) ili (Q)	Poprečna sila (V)	Momenti savijanja (M)
$q = 0$ (nema opterećenja)	konstantna	mijenja se pravocrtno
$q = \text{konst.}$ (ravnomjerno opterećenje)	mijenja se linearno	mijenja se parabolično
$q = \text{varijabilno}$ (npr. trokutasto)	mijenja se nelinearno	mijenja se krivuljasto
koncentrirana sila (Q)	skok u dijagramu	lom (promjena nagiba)
koncentrirani moment (M)	bez promjene	skok u dijagramu momenta

Opt. DUS	Bez opterećenja				
V	horizontalno	skok	pravac	lom	skok
M	pravac	lom	parabola	2 parabole s zajedničkom tangentom	lom

Slika 5.7. Prikaz promjene dijagrama ovisno o opterećenju - skok u dijagramu sile, lom u dijagramu momenta

Zahvaljujući ovoj analizi, moguće je brzo procijeniti koji dijelovi konstrukcije su najopterećeniji, gdje su potrebna pojačanja i kako optimizirati oblik i dimenzije konstrukcijskog elementa.

Postupak proračuna unutarnjih sila i izrade dijagrama

1. Analiza cijelog elementa (nosača)

- Nacrtaj skicu nosača s opterećenjima i osloncima.
- Izračunaj **reakcije u osloncima** pomoću uvjeta ravnoteže:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0.$$

2. Odabir karakterističnih presjeka

- Odredi **ključne točke** gdje se opterećenje mijenja:
 - oslonci
 - koncentrirane sile ili momenti
 - promjene u geometriji nosača.

3. "Rezanje" nosača u odabranim presjecima

- Zamisli da „izrežeš” nosač u tim točkama.
- Promatraj lijevu ili desnu stranu.
- Uvedi **unutarnje sile** u presjeku:
 - **N** – uzdužna sila
 - **V** – poprečna sila
 - **M** – moment savijanja

4. Postavljanje uvjeta ravnoteže za izrezani dio

- Napiši jednadžbe ravnoteže za taj segment:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0.$$

- Riješi ih i izračunaj vrijednosti N, V i M u presjeku.

5. Ponovi postupak za više presjeka

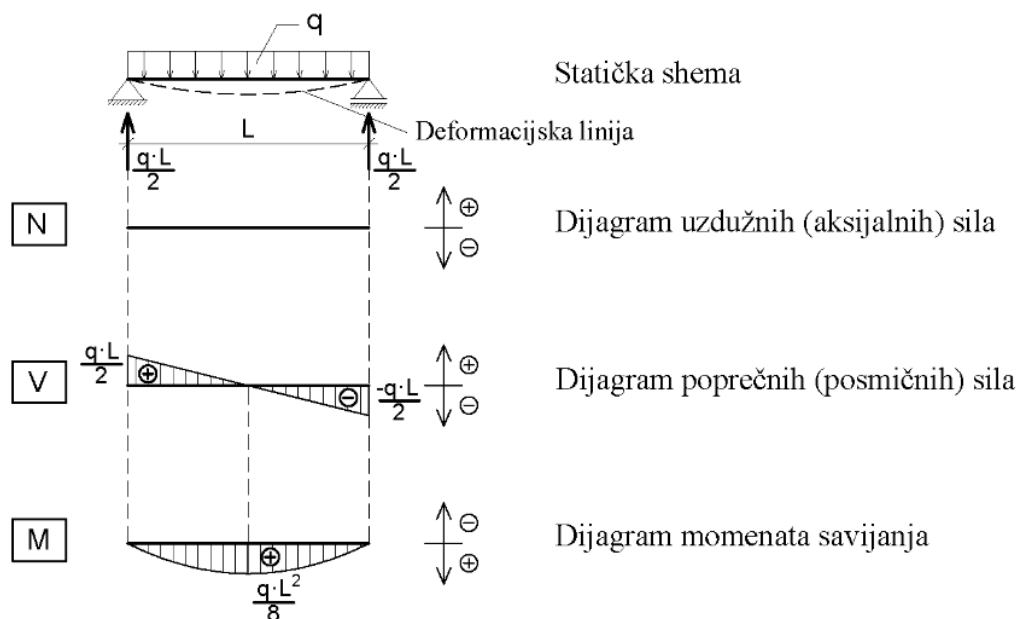
- Po potrebi ponavljaj rezanje u više točaka kako bi dobio detaljniju sliku raspodjele sila.

6. Crtanje dijagrama unutarnjih sila

- Za svaki presjek u mjerilu nacrtaj:
 - **dijagram uzdužne sile (N)** – okomito uz os nosača
 - **dijagram poprečne sile (V)** – prikazuje skokove i nagibe
 - **dijagram momenta savijanja (M)** – parabole, pravci, lomovi.
- Poštuj standardne konvencije znakova i smjerova.

U nastavku su prikazani:

1. **tipični dijagrami unutarnjih sila** za jednostavno opterećenu gredu s maksimalnim vrijednostima unutarnjih sila

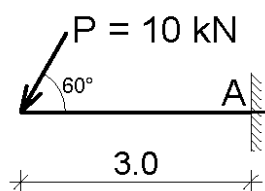


Slika 5.8. *Primjeri dijagrama unutarnjih sila za jednostavno opterećenu gredu*

Jednostavno opterećena greda najčešći je konstrukcijski element kojim ćete se koristiti u proračunima. Zato se dijagrami na slici 5.8. zajedno s izrazima nauče napamet.

2. **primjeri određivanja unutarnjih sila** na nekoliko konstrukcijskih elemenata počevši od jednostavnijih i češće korištenih prema složenijima.

5.2.1. Određivanje i crtanje dijagrama unutarnjih sila – 1. primjer



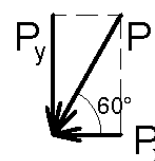
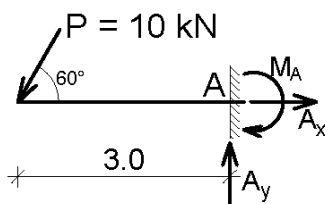
Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila za prikazani konzolni nosač.

1) Određivanje reakcija

Zadana je konzolna greda opterećena koncentriranom silom. Prvi je korak u rješavanju zadatka određivanje reakcija na način kako je objašnjeno u prethodnom poglavlju. Rastavimo kosu silu P na horizontalnu i vertikalnu komponentu, zatim pretpostavimo reakcije te ih izračunamo primjenom analitičkih uvjeta ravnoteže.

$$P_x = P \cdot \cos 60^\circ = 5,0 \text{ kN}$$

$$P_y = P \cdot \sin 60^\circ = 8,66 \text{ kN}$$



$$\sum F_x = 0$$

$$A_x - P_x = 0 \rightarrow A_x = P_x = 5,0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

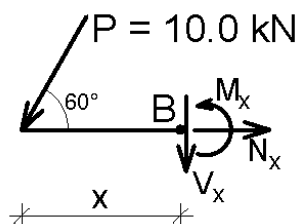
$$A_y - P_y = 0 \rightarrow A_y = P_y = 8,66 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$P_y \cdot 3,0 - M_A = 0 \rightarrow M_A = 8,66 \cdot 3,0 = 26,0 \text{ kNm}$$

2) Određivanje unutarnjih sila

Kako bismo odredili unutarnje sile u nekom presjeku, moramo definirati njegovu poziciju. U ovom primjeru presjek postavimo u točki B, koja je na udaljenosti x od početka, odnosno lijevog ruba grede. Zatim analiziramo lijevu stranu od definiranog presjeka, a sve desno od presjeka odbacujemo i zamjenjujemo s unutarnjim silama N_x , V_x i M_x . Unutarnje sile izračunamo primjenom analitičkih uvjeta ravnoteže. Kod izračuna sume momenata računamo moment na točku presjeka.



$$\sum F_x = 0$$

$$N_x - P_x = 0 \rightarrow N_x = P_x = 5,0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-V_x - P_y = 0 \rightarrow V_x = -P_y = -8,66 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0$$

$$P_y \cdot x + M_x = 0 \rightarrow M_x = -8,66 \cdot x$$

Iz dobivenoga zaključujemo kako iznos uzdužne sile N ne ovisi o udaljenosti x , odnosno ima konstantnu vrijednost na dužini od $x=0$ do $x=3$. Isto vrijedi i za vrijednost poprečne sile V . Vrijednost momenta savijanja M ovisi o udaljenosti x i mijenja se linearno (jednadžba pravca).

3) Dijagrami unutarnjih sila

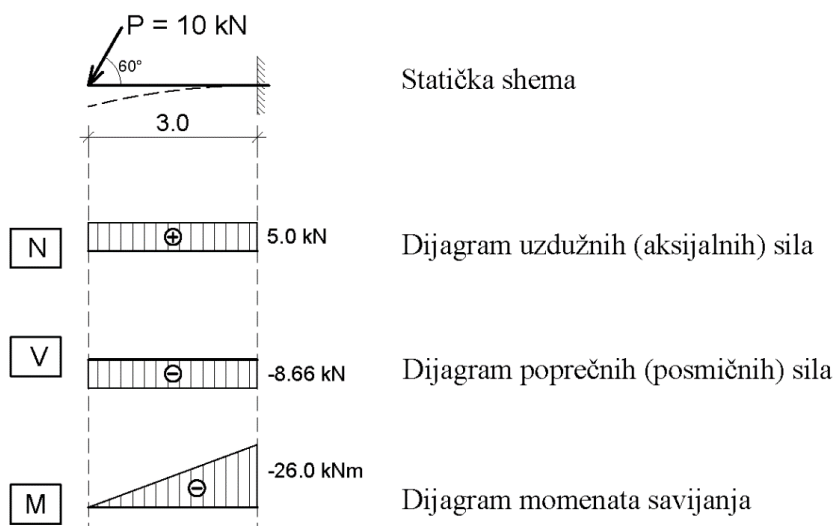
Vrijednosti unutarnjih sila u rubnim točkama konzole prikazane se u tablici, a dijagrame između rubnih točaka isctavamo prema dobivenim funkcijama, odnosno pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila.

	$x = 0,0 \text{ m}$	$x = 3,0 \text{ m}$
$N(x) = 5,0$	5,00 kN	5,00 kN
$V(x) = -8,66$	- 8,66 kN	- 8,66 kN
$M(x) = -8,66 \cdot x$	0,00 kNm	- 26,00 kNm

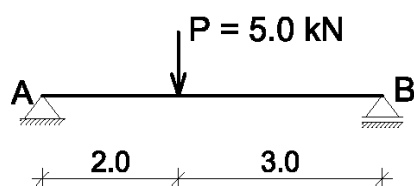
Vrijednost uzdužne sile N ne ovisi o udaljenosti x , odnosno konstantna je duž konzole. To odgovara pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila, s obzirom na to da između rubnih točaka grede nema utjecaja koji bi promijenio vrijednost uzdužne sile. Sama vrijednost uzdužne sile je pozitivna, pa je crtamo s gornje strane dijagrama. Pozitivna vrijednost uzdužne sile odgovara vlačnoj sili u konzoli, koja je izazvana horizontalnom komponentom sile P .

Vrijednost poprečne sile V također ne ovisi o udaljenosti x , odnosno konstantna je duž konzole. To odgovara pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila, s obzirom na to da između rubnih točaka grede nema utjecaja koji bi promijenio vrijednost poprečne sile. Sama vrijednost poprečne sile je negativna, pa je crtamo s donje strane dijagrama. Vertikalna komponenta sile P izaziva skok prema dolje za vrijednost P_y , da bi na kraju konzole (u osloncu A) dijagram imao skok prema gore za vrijednost A_y .

Vrijednost momenta savijanja M ovisi o udaljenosti x , odnosno mijenja se linearno duž grede po jednadžbi pravca. To odgovara pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila, s obzirom na to da između rubnih točaka konzole nema opterećenja. Dijagram momenata savijanja je negativan, pa ga crtamo s gornje strane dijagrama. Kako se može vidjeti na deformacijskoj liniji prikazanoj na statičkoj shemi, konzola se uslijed opterećenja silom P deformira prema dolje, što znači da se rasteže gornji rub grede. Dijagram momenata savijanja crtamo na vlačnoj strani konzole, a to je u ovom slučaju gornja strana, što se poklapa s izračunatim vrijednostima momenata savijanja.



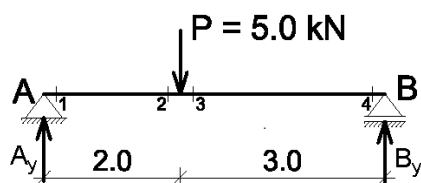
5.2.2. Određivanje i crtanje dijagrama unutarnjih sila – 2. primjer



Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

1) Određivanje reakcija

Zadana je jednostavna greda opterećena koncentriranom silom. Kako bismo riješili zadatak, najprije moramo odrediti reakcije na način kako je objašnjeno u prethodnom poglavlju. Pretpostavimo reakcije i izračunamo ih primjenom analitičkih uvjeta ravnoteže.



$$\sum M_A = 0$$

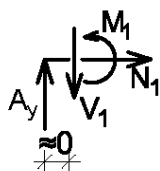
$$B_y \cdot 5,0 - P \cdot 2,0 = 0 \rightarrow B_y = \frac{5,0 \cdot 2,0}{5,0} = 2,0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$P \cdot 3,0 - A_y \cdot 5,0 = 0 \rightarrow A_y = \frac{5,0 \cdot 3,0}{5,0} = 3,0 \text{ kN}$$

2) Određivanje unutarnjih sila

Kada smo odredili reakcije, prelazimo na izračun unutarnjih sila. Kako ne bismo određivali dijagrame kao $f(x)$, unutarnje sile izračunavamo u karakterističnim presjecima prema pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila, a između njih dijagrame crtamo prema tim istim pravilima. Stoga su nam u ovom zadatku potrebna 4 presjeka, neposredno prije i poslije svake od sila A_y , P i B_y . U nastavku je prikazan detaljan postupak izračuna unutarnjih sila u svakom od 4 presjeka, pri čemu se u svim presjecima analizira lijeva strana, dakle odbacujemo sve desno od presjeka. Unutarnje sile izračunamo primjenom analitičkih uvjeta ravnoteže te ih označavamo indeksom koji predstavlja broj presjeka na koji se pojedina sila odnosi. Kod izračuna sume momenata ne pišemo indeks na koju točku računamo moment, no podrazumijeva se da uvijek računamo moment na točku presjeka.

Presjek 1)

Presjek 1) računamo neposredno uz oslonac A, na udaljenosti koja je praktički jednaka 0 m.

$$\sum F_x = 0$$

$$N_1 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

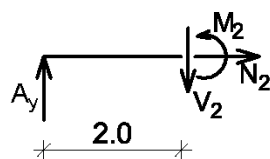
$$A_y - V_1 = 0$$

$$V_1 = A_y = 3,0 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0$$

$$M_1 - A_y \cdot 0 = 0$$

$$M_1 = 0 \text{ kNm}$$

Presjek 2)

Presjek 2) računamo na udaljenosti 2,0 metra od oslonca A, neposredno prije sile P , no ona nije uključena u presjek.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$N_2 = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

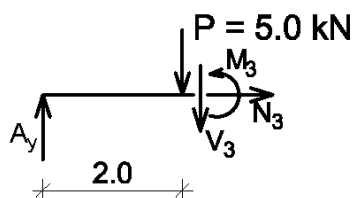
$$A_y - V_2 = 0$$

$$V_2 = A_y = 3,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_2 - A_y \cdot 2,0 = 0$$

$$M_2 = 3 \cdot 2 = 6,0 \text{ kNm}$$

Presjek 3)

Presjek 3) računamo na udaljenosti 2,0 metra od oslonca A, neposredno nakon sile P , pa je ona uključena u presjek. Kako je presjek neposredno nakon točke u kojoj djeluje sila P , njihov je razmak praktički jednak 0 m.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$N_3 = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$A_y - P - V_3 = 0$$

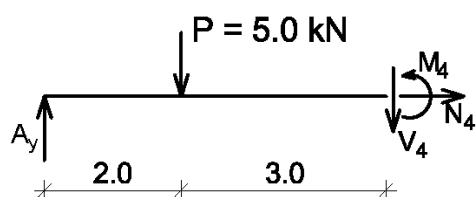
$$V_3 = 3 - 5 = -2,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_3 - A_y \cdot 2,0 + P \cdot 0 = 0$$

$$M_3 = 3 \cdot 2 = 6,0 \text{ kNm}$$

Uočimo kako se između presjeka 2) i 3) mijenja samo iznos poprečne sile V , što je u skladu s pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sile. Naime, točke presjeka 2) i 3) geometrijski su na istom mjestu, a promjenu poprečnih sila izaziva sila P .

Presjek 4)

Presjek 4) računamo na udaljenosti 5,0 metra od oslonca A, neposredno prije oslonca B, pa on nije uključen u presjek.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$N_4 = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$A_y - P - V_4 = 0$$

$$V_4 = 3 - 5 = -2,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_4 - A_y \cdot 5,0 + P \cdot 3,0 = 0$$

$$M_4 = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = 0 \text{ kNm}$$

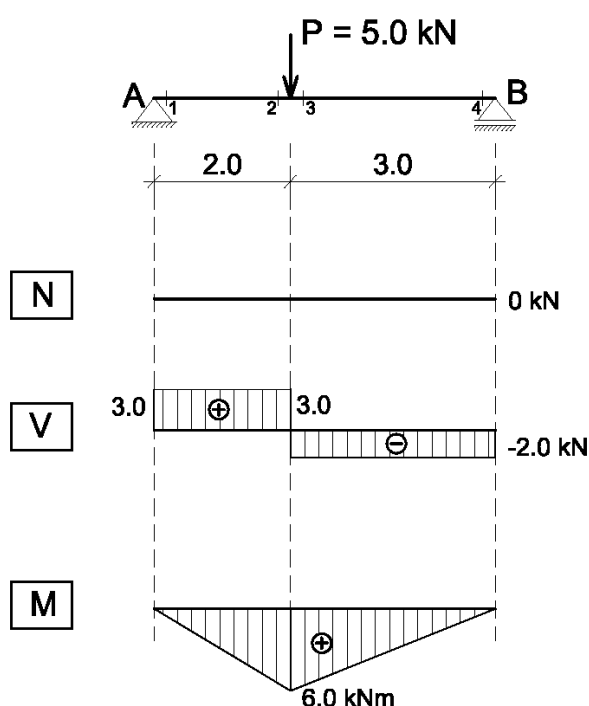
Uočimo kako su momenti u krajnjim točkama 1) i 4) jednaki nuli, što je ispravno jer su navedene točke krajevi grede na kojima se nalaze zglobni oslonci, a u zglobu moment uvijek mora biti jednak nuli.

3) Dijagrami unutarnjih sila

Dijagrame crtamo temeljem dobivenih vrijednosti unutarnjih sila u presjecima 1, 2, 3 i 4, a između tih presjeka dijagram iscrtavamo prema naučenim pravilima.

Na dijagramu poprečnih sila možemo vidjeti kako se mijenja u skladu sa silama koje djeluju poprečno na gredu, što se u ovom slučaju poklapa s vertikalnim silama. Dakle, u točki A dijagram poprečnih sila ima skok prema gore za 3,0 kN, što se poklapa sa smjerom i iznosom reakcije A_y , zatim na mjestu sile P imamo skok prema dolje za 5,0 kN i na kraju u točki B dijagram ima skok za 2,0 kN, što je jednako iznosu reakcije B_y .

Na momentnom dijagramu vidimo kako u krajnjim točkama imamo vrijednosti momenta jednake nuli. Navedeno mora biti ispunjeno jer se greda u krajnjim točkama oslanja na zglobove, a momenti u zglobovima uvijek moraju biti nula. Ispod koncentrirane sile P momentni dijagram ima lom, te se lomi u skladu sa smjerom djelovanja te sile, sve prema pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila.



Dijagrame unutarnjih sila započinjemo prikazom zadanog sustava, sa svim kotama i zadanim opterećenjem.

Ispod zadanog sustava crtamo vertikalne crtkane linije ispod točaka presjeka.

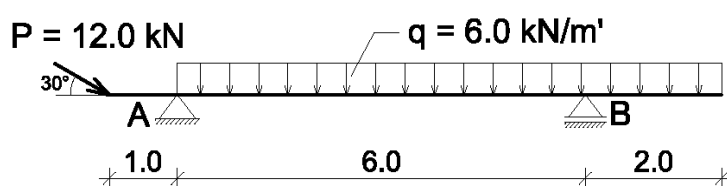
Zatim crtamo dijagram uzdužnih sila označen slovom N, kod kojeg su pozitivne vrijednosti iznad, a negativne vrijednosti ispod osnovne linije.

Dijagram poprečnih sila označen slovom V crtamo kao i dijagram uzdužnih sila, dakle pozitivne vrijednosti iznad, a negativne vrijednosti ispod osnovne linije.

Dijagram momenata savijanja označen slovom M crtamo obrnuto, dakle pozitivne vrijednosti ispod, a negativne vrijednosti iznad osnovne linije.

Sve vrijednosti izračunate u presjecima moraju biti unesene u istom mjerilu unutar pojedinog dijagrama. Na dijagramima moraju jasno biti napisane vrijednosti i označeni predznaci. Na kraju dijagrame šrafiramo tankim linijama, okomito na os elementa na koji se dijagram odnosi.

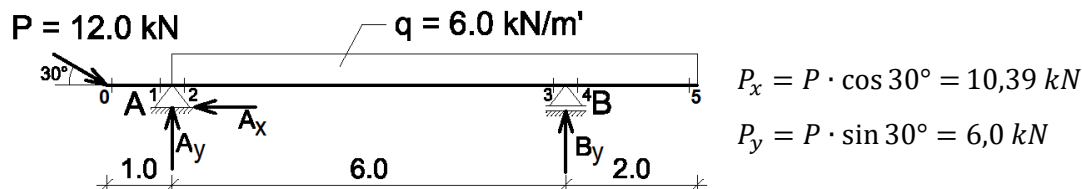
5.2.3. Određivanje i crtanje dijagrama unutarnjih sila – 3. primjer



Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

1) Određivanje reakcija

Zadana je greda s obostranim prepustom, opterećena kontinuiranim opterećenjem i koncentriranom silom. Kako bismo riješili zadatak, najprije moramo odrediti reakcije. Prvi je korak pretpostaviti njihov smjer, a kako bismo dobili ispravnu orijentaciju, sjetimo se da je reakcija suprotna od akcije. Stoga će vertikalne komponente reakcija djelovati prema gore, dok će horizontalna komponenta reakcije, koja nastaje u nepomičnom zglobnom osloncu, djelovati ulijevo, suprotno od horizontalne komponente sile P . Sada možemo izračunati reakcije primjenom analitičkih uvjeta ravnoteže.



$$\sum F_x = 0$$

$$P_x - A_x = 0$$

$$A_x = P_x = 10,39 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$B_y \cdot 6,0 + P_y \cdot 1,0 - q \cdot 8,0 \cdot 4,0 = 0$$

$$B_y = \frac{-6,0 \cdot 1,0 + 6,0 \cdot 8,0 \cdot 4,0}{6,0} = 31,0 \text{ kN}$$

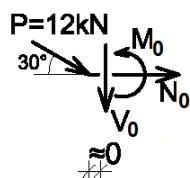
$$\sum M_B = 0$$

$$P_y \cdot 7,0 - A_y \cdot 6,0 + q \cdot 8,0 \cdot 2,0 = 0$$

$$A_y = \frac{6,0 \cdot 7,0 + 6,0 \cdot 8,0 \cdot 2,0}{6,0} = 23,0 \text{ kN}$$

2) Određivanje unutarnjih sila

Kada smo odredili reakcije, prelazimo na izračun unutarnjih sila. Prema pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila trebalo bi nam 6 presjeka, neposredno prije i poslije svake od sila, no kako će biti prikazano u nastavku, dovoljni su nam presjeci 1 – 4. Uz navedene presjeke naknadno ćemo definirati dodatni presjek za izračun maksimalnog momenta.

Presjek 0)

Presjek 0) računamo na početku grede, neposredno uz silu P , na udaljenosti koja je praktički jednaka 0 m. Kako se vidi u nastavku, vrijednosti unutarnjih sila u presjeku 0) i presjeku 1) razlikuju se samo u vrijednosti momenta, koji je u presjeku 0) jednak nuli, što se može zaključiti i bez računa.

$$\sum F_x = 0$$

$$P_x + N_0 = 0$$

$$N_0 = -10,39 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

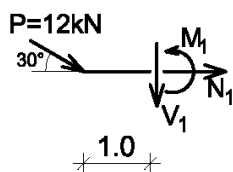
$$-P_y - V_0 = 0$$

$$V_0 = -6,0 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0$$

$$P_y \cdot 0 + M_0 = 0$$

$$M_0 = 0 \text{ kNm}$$

Presjek 1)

Presjek 1) računamo na udaljenosti 1,0 metra od početka grede, neposredno prije oslonca A, pa reakcije A_x i A_y nisu uključene u presjek.

$$\sum F_x = 0$$

$$P_x + N_1 = 0$$

$$N_1 = -10,39 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

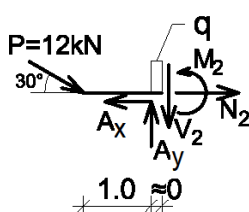
$$-P_y - V_1 = 0$$

$$V_1 = -6,0 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0$$

$$P_y \cdot 1,0 + M_1 = 0$$

$$M_1 = -6,0 \text{ kNm}$$

Presjek 2)

Presjek 2) računamo na udaljenosti 1,0 metra od početka grede, neposredno nakon oslonca A, pa su reakcije A_x i A_y uključene u presjek. Presjekom je teoretski obuhvaćeno kontinuirano opterećenje q , no kako ono djeluje na dužini od 0 metara, učinak tog opterećenja jednak je nuli:

$$\sum F_x = 0$$

$$P_x - A_x + N_2 = 0$$

$$N_2 = 10,39 - 10,39 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

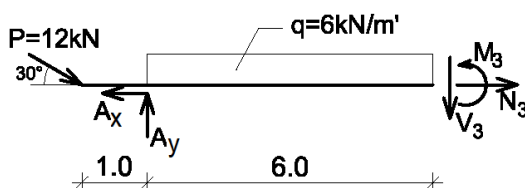
$$-P_y + A_y - q \cdot 0 - V_2 = 0$$

$$V_2 = -6 + 23 = 17,0 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0$$

$$P_y \cdot 1,0 + M_2 = 0$$

$$M_2 = -6,0 \text{ kNm}$$

Presjek 3)

Presjek 3) računamo na udaljenosti 6,0 metra od oslonca A, neposredno prije oslonca B, pa reakcija B_y nije uključena u presjek.

$$\sum F_x = 0$$

$$P_x - A_x + N_3 = 0$$

$$N_3 = 10,39 - 10,39 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

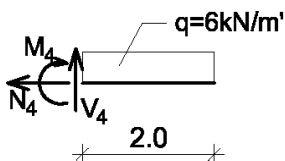
$$-P_y + A_y - q \cdot 6 - V_3 = 0$$

$$V_3 = -6 + 23 - 6 \cdot 6 = -19,0 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0$$

$$P_y \cdot 7 - A_y \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 3 + M_3 = 0$$

$$M_3 = -6 \cdot 7 + 23 \cdot 6 - 6 \cdot 6 \cdot 3 = -12,0 \text{ kNm}$$

Presjek 4)

Presjek 4) računamo tako da analiziramo desnu stranu, pa smo odbacili sve lijevo od presjeka. Na taj način smanjimo opseg računa i ujedno provjerimo dosadašnji izračun, jer se vrijednost momenta u presjeku 4 mora poklapati s vrijednošću momenta u presjeku 3 (ista točka).

$$\sum F_x = 0$$

$$N_4 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_4 - q \cdot 2 = 0$$

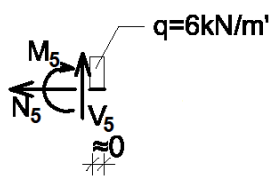
$$V_4 = 6 \cdot 2 = 12,0 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0$$

$$-M_4 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$M_4 = -12,0 \text{ kNm}$$

Presjek 5)



Presjek 5) nije nužan za izračun jer se on nalazi na samom kraju grede. Presjekom je obuhvaćeno samo kontinuirano opterećenje q , no kako ono djeluje na dužini od 0 metara, učinak tog opterećenja jednak je nuli:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$N_5 = 0$$

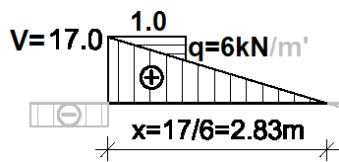
$$V_5 - q \cdot 0 = 0$$

$$-M_5 - q \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$V_5 = 0 \text{ kN}$$

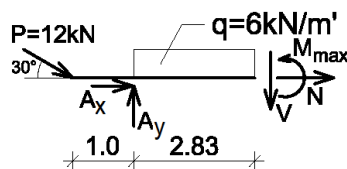
$$M_5 = 0 \text{ kNm}$$

Maksimalni moment



Maksimalni moment računamo na mjestu nultočke dijagrama poprečnih sila. Tu točku pronalazimo preko sličnosti trokuta:

$$\frac{q}{1,0} = \frac{V}{x} \rightarrow x = \frac{V}{q} = \frac{17}{6} = 2,83 \text{ m}$$

 $\Sigma M =$


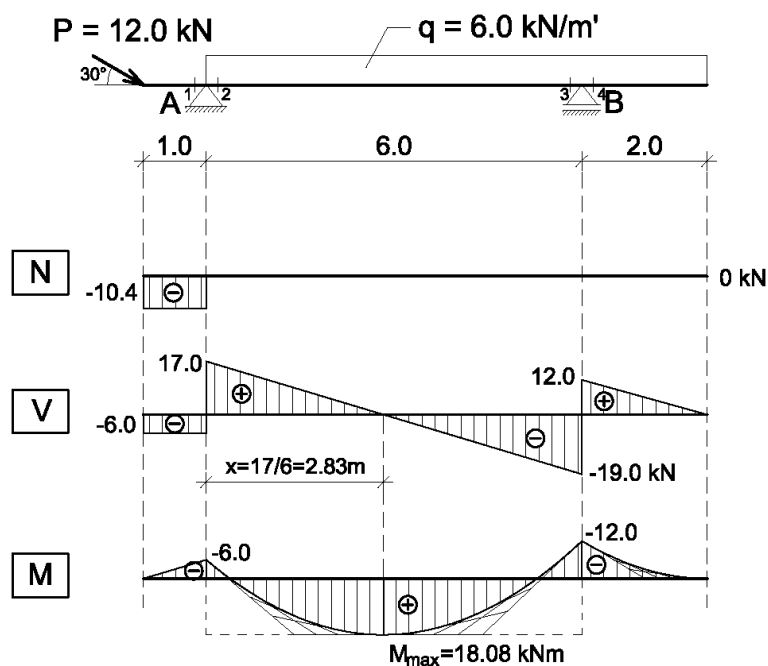
0

$$P_y \cdot 3,83 - A_y \cdot 2,83 + q \cdot 2,83 \cdot 2,83/2 + M_{max} = 0$$

$$M_{max} = -6 \cdot 3,83 + 23 \cdot 2,83 - 6 \cdot 2,83 \cdot 2,83/2 = 18,08 \text{ kNm}$$

3) Dijagrami unutarnjih sila

Dijagrame crtamo na način kako je objašnjeno u prethodnom zadatku.

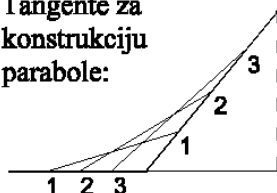


Na dijagramu uzdužnih sila možemo vidjeti kako se uzdužna sila javlja između točaka gdje djeluje sila P i oslonca A. Navedeno mora biti tako jer na tim mjestima djeluju jedine sile koje imaju horizontalnu komponentu, što se po smjeru djelovanja poklapa s uzdužnom silom u gredi. Nadalje, navedene sile djeluju jedna prema drugoj, dakle izazivaju tlačnu silu u gredi, a tlak uvijek označavamo s negativnim predznakom.

Na dijagramu poprečnih sila možemo vidjeti kako se mijenja u skladu sa silama koje djeluju poprečno na gredu, što se u ovom slučaju poklapa s vertikalnim silama. Dakle, na mjestu sile P dijagram poprečnih sila ima skok prema dolje za 6 kN, što se poklapa sa smjerom i iznosom vertikalne komponente sile P_y , a zatim na mjestu oslonca A imamo skok prema gore za vrijednost $6 + 17 = 23,0$ kN, što je jednako iznosu reakcije A_y . Nakon toga dijagram linearno pada na dijelu gdje je greda opterećena kontinuiranim opterećenjem, a promjena $17 + 19 = 36,0$ kN jednaka je opterećenju koje nastaje na toj dužini: $q \cdot 6 = 36,0$ kN. Zatim imamo skok prema gore za iznos koji je jednak reakciji B_y , da bi nakon toga dijagram linearno padao do krajnje vrijednosti koja je jednaka nuli. Kako je kontinuirano opterećenje q istog iznosa na dijelu između oslonaca A i B, kao i na desnom prepustu, dijagram poprečnih sila na tim je dijelovima paralelan.

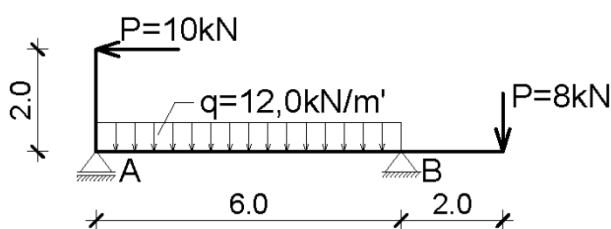
Na momentnom dijagramu vidimo kako u krajnjim točkama imamo vrijednosti momenta jednake nuli, a iznad oslonaca imamo lomove koji nastaju od reakcija kao koncentriranih sila. Na lijevom prepustu dijagram je pravac jer na tom dijelu nema opterećenja između sile P i oslonca A. Između oslonaca A i B te na desnom prepustu momentni dijagram je parabola, koju crtamo kako slijedi.

Tangente za konstrukciju parabole:



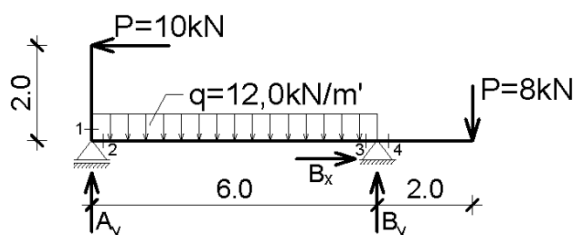
Parabolu konstruiramo tako da od najniže točke, gdje rubna tangenta mora biti horizontalna, nacrtamo horizontalnu dužinu do točke koja se nalazi točno ispod najviše točke parabole. Zatim iz najviše točke parabole nacrtamo kosu dužinu koja prolazi kroz polovište horizontalne linije. Dobivene dvije dužine (horizontalna i kosa) predstavljaju rubne tangente krivulje. Kako bismo dobili dodatne tangente, podijelimo dvije rubne tangente na proizvoljni broj dijelova, numeriramo ih i spojimo kako je prikazano na slici.

5.2.4. Određivanje i crtanje dijagrama unutarnjih sila – 4. primjer



Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

1) Određivanje reakcija



Prvi je korak u rješavanju zadatka određivanje reakcija prema poznatim pravilima. Pripazimo na razliku između oslonca A, koji je klizni i ima samo vertikalnu reakciju A_y , i oslonca B koji je nepomičan, pa nastaju horizontalna B_x i vertikalna reakcija B_y .

$$\Sigma F_x = 0$$

$$B_x - P = 0$$

$$B_x = P = 10,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$B_y \cdot 6,0 + P \cdot 2,0 - q \cdot 6,0 \cdot 3,0 - P \cdot 8,0 = 0$$

$$B_y = \frac{-10 \cdot 2 + 12 \cdot 6 \cdot 3 + 10 \cdot 8}{6,0} = 46,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$P \cdot 2,0 - A_y \cdot 6,0 + q \cdot 6,0 \cdot 3,0 - P \cdot 2,0 = 0$$

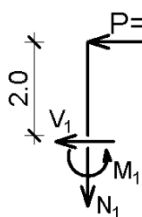
$$A_y = \frac{10 \cdot 2 + 12 \cdot 6 \cdot 3 - 10 \cdot 2}{6,0} = 36,0 \text{ kN}$$

2) Određivanje unutarnjih sila

Kada smo odredili reakcije, prelazimo na izračun unutarnjih sila. Prema pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila postavljamo presjke 1 – 4. Presjeci neposredno uz sile P nisu nužni jer prema poznatim pravilima znamo što se i kako mijenja od unutarnjih sila od obližnjeg presjeka do samog kraja grede. Sjetimo se da ako nema opterećenja na nekom segmentu grede, nema ni promjene uzdužnih i poprečnih sila. Jedino što se mijenja moment je savijanja, za koji znamo da na slobodnom kraju grede mora iznositi 0.

Kako ne bismo stalno pisali izraze ravnoteže, možemo preskočiti taj korak i direktno pisati čemu je jednaka pojedina sila. Pri tome moramo paziti na predznak ovisno o orijentaciji pojedine sile. Ako se prisjetimo kako je ravnoteža ispunjena kada su sile suprotno orijentirane, onda možemo uvesti pravilo da je pojedina sila pozitivna ako je orijentirana suprotno od sile koju tražimo, dok će biti negativnog predznaka ako su iste orijentacije.

Presjek 1)



Presjek 1) računamo neposredno iznad oslonca A. Presjekom je obuhvaćen vertikalni prepust grede, a odbačeno sve ispod, odnosno desno od njega. Unutarnje sile orijentiramo prema pravilima kada odbacujemo desni dio grede. Obratimo pozornost na to da je sada uzdužna sila N u smjeru osi grede, dakle vertikalna, dok je poprečna sila okomito na os grede, dakle horizontalna.

$$N_1 = 0$$

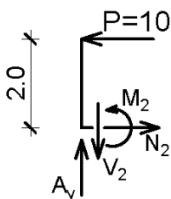
$$V_1 = -P$$

$$M_1 = -P \cdot 2,0$$

$$V_1 = -10,0 \text{ kN}$$

$$M_1 = -10 \cdot 2,0 = -20,0 \text{ kNm}$$

Presjek 2)



Presjek 2) računamo neposredno uz oslonac A, na horizontalnom dijelu grede. Stoga su sada unutarnje sile orijentirane kako je uobičajeno kada je greda horizontalna.

$$N_2 = P$$

$$V_2 = A_y$$

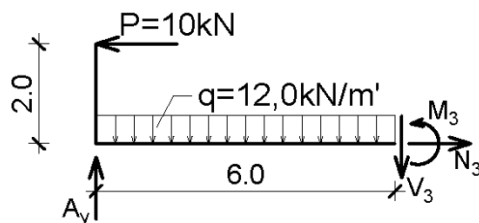
$$M_2 = -P \cdot 2,0$$

$$N_2 = 10,0 \text{ kN}$$

$$V_2 = 36,0 \text{ kN}$$

$$M_2 = -10 \cdot 2 = -20,0 \text{ kNm}$$

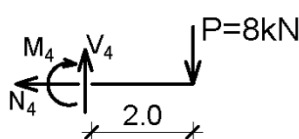
Presjek 3)



Presjek 3) računamo na udaljenosti 6,0 metra od oslonca A, neposredno prije oslonca B. Pripazite da ne uključite u analizu horizontalnu reakciju B_x , jer iako je ona prikazana lijevo od oslonca B, njezino je hvatište u točki oslonca B i nije obuhvaćeno ovim presjekom.

$$\begin{aligned} N_3 &= P & V_3 &= A_y - q \cdot 6,0 & M_3 &= A_y \cdot 6 - P \cdot 2 - q \cdot 6 \cdot 3 \\ N_3 &= 10,0 \text{ kN} & V_3 &= 36 - 12 \cdot 6 & M_3 &= 36 \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 12 \cdot 6 \cdot 3 \\ & & V_3 &= -36,0 \text{ kN} & M_3 &= -20,0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

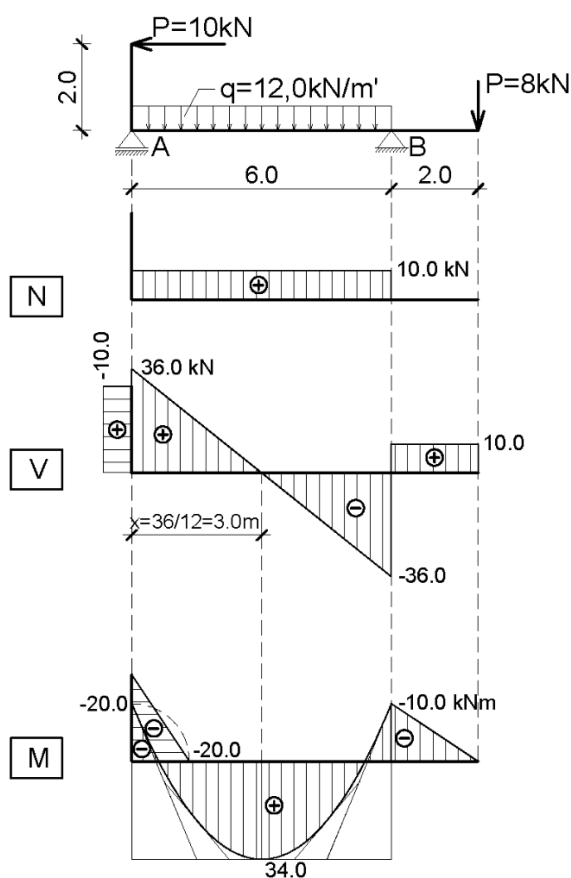
Presjek 4)



Presjek 4) računamo tako da analiziramo desnu stranu, pa smo odbacili sve lijevo od presjeka. Na taj način smanjimo opseg računa i ujedno provjerimo dosadašnji izračun, jer se vrijednost momenta u presjeku 4 mora poklapati s vrijednošću momenta u presjeku 3 (ista točka).

$$\begin{aligned} N_4 &= 0 & V_4 &= P & M_4 &= -P \cdot 2,0 \\ & & V_4 &= 10,0 \text{ kN} & M_4 &= -10 \cdot 2 = -20,0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

3) Dijagrami unutarnjih sila



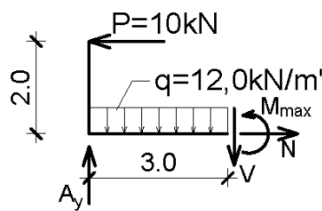
Dijagrame crtamo na način kako je objašnjeno u prijašnjim zadacima. Pripazimo da dijagrame crtamo i šrafiramo okomito na os elementa na kojem prikazujemo unutarnje sile.

Na dijagramu uzdužnih sila možemo vidjeti kako se uzdužna sila javlja samo između oslonaca A i B. To je ispravno jer je izaziva sila P (koja se prenosi po vertikalnom segmentu grede kao poprečna sila), a suprotstavlja joj se horizontalna komponenta reakcije B .

Na dijagramu poprečnih sila možemo vidjeti kako se mijenja u skladu sa silama koje djeluju poprečno na gredu. Najprije sila P izaziva skok dijagrama ulijevo, da bi dalje dijagram bio konstantan na vertikalnom segmentu grede jer na tom dijelu nema opterećenja. Na horizontalnom segmentu grede imamo skok u smjeru i iznosu reakcije A_y , nakon toga dijagram linearno pada na dijelu gdje je greda opterećena kontinuiranim opterećenjem q . Na mjestu oslonca B dolazi do skoka u smjeru i iznosu reakcije B_y , nakon čega je dijagram konstantan do kraja grede (nema opterećenja), gdje ga sila P vraća u 0.

Na momentnom dijagramu vidimo kako u krajnjim točkama imamo vrijednosti momenta jednake nuli, a na mjestima oslonaca A i B imamo lom koji nastaje od koncentriranih sila, odnosno reakcija u navedenim osloncima. U točki A, gdje se greda „lomi“ između vertikalnog i horizontalnog segmenta, moment mora biti jednak i crtan na istoj strani, što je prikazano crtkanim isječkom kružnice. Na dijelu dijagrama gdje nema opterećenja, dijagram je pravac, a na dijelu gdje djeluje kontinuirano opterećenje q , momentni dijagram je parabola koju crtamo prema pravilima objašnjenim u prethodnom zadatku.

Maksimalni moment računamo na mjestu nultočke dijagrama poprečnih sila. Tu točku pronalazimo preko sličnosti trokuta, kako je objašnjeno u prethodnom zadatku.



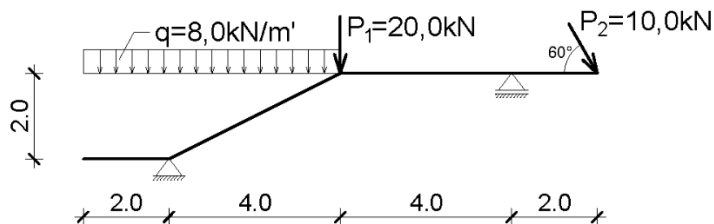
$$x = \frac{V}{q} = \frac{36,0}{12,0} = 3,0 \text{ m}$$

$$M_{max} = A_y \cdot x - P \cdot 2,0 - q \cdot x \cdot x/2$$

$$M_{max} = 36,0 \cdot 3,0 - 10,0 \cdot 2,0 - 12,0 \cdot 3,0 \cdot 1,5$$

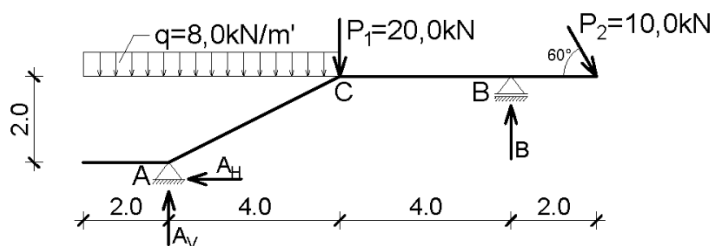
$$M_{max} = 34,0 \text{ kNm}$$

5.2.5. Određivanje i crtanje dijagrama unutarnjih sila – 5. primjer



Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

1) Određivanje reakcija



Prvi je korak u rješavanju zadatka određivanje reakcija prema poznatim pravilima.

$$\sum F_x = 0$$

$$P_{2x} - A_H = 0$$

$$A_H = 10,0 \cdot \cos 60^\circ = 5,0 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$B \cdot 8,0 - q \cdot 6,0 \cdot 1,0 - P_1 \cdot 4,0 - P_{2x} \cdot 2,0 - P_{2y} \cdot 10,0 = 0$$

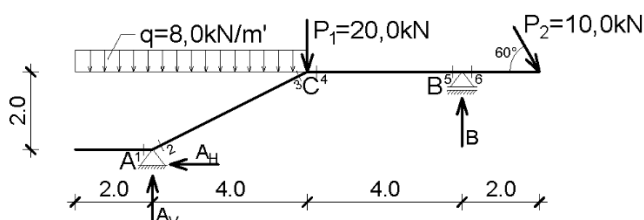
$$B = \frac{8 \cdot 6 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 + 10 \cdot \sin 60^\circ \cdot 10}{8,0} = 28,08 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$q \cdot 6,0 \cdot 7,0 + P_1 \cdot 4,0 - A_H \cdot 2,0 - A_V \cdot 8,0 - P_{2y} \cdot 2,0 = 0$$

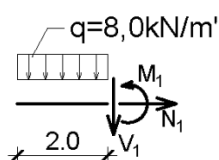
$$A_V = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7 + 20 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 10 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2}{8,0} = 48,58 \text{ kN}$$

2) Određivanje unutarnjih sila



Kada smo odredili reakcije, prelazimo na izračun unutarnjih sila. Prema pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila trebamo postaviti presjeke neposredno prije i poslije svake od sila, odnosno na mjestu promjene opterećenja i promjene geometrije grede. Tako dobivamo presjeke 1 – 6, dok presjeke na samom početku i kraju grede ne radimo.

Presjek 1)



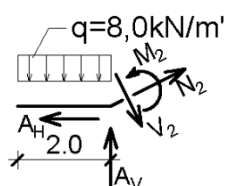
Presjek 1) računamo neposredno prije oslonca A, analizirajući lijevi prepust grede.

$$N_1 = 0$$

$$V_1 = -q \cdot 2,0 = -8 \cdot 2 = 16,0 \text{ kN}$$

$$M_1 = -q \cdot 2,0 \cdot 2,0/2 = -8 \cdot 2 \cdot 1 = -16,0 \text{ kNm}$$

Presjek 2)



Presjek 2) računamo neposredno nakon oslonca A i unutarnje su sile orijentirane u skladu s lokalnom osi segmenta grede između točaka A i C.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,0}{4,0} \rightarrow \alpha = 26^\circ 33' 54''$$

$$N_2 = (q \cdot 2,0)_x + A_{H,x} - A_{V,x}$$

$$N_2 = 8,0 \cdot 2,0 \cdot \sin \alpha + 5,0 \cdot \cos \alpha - 48,58 \cdot \sin \alpha$$

$$N_2 = -10,10 \text{ kN}$$

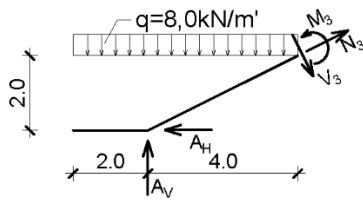
$$V_2 = -(q \cdot 2,0)_y + A_{H,y} + A_{V,y}$$

$$V_2 = -8,0 \cdot 2,0 \cdot \cos \alpha + 5,0 \cdot \sin \alpha + 48,58 \cdot \cos \alpha$$

$$V_2 = 31,38 \text{ kN}$$

$$M_2 = -q \cdot 2,0 \cdot 1,0 = -16,0 \text{ kNm}$$

Presjek 3)



Presjek 3) računamo neposredno prije točke C i unutarnje su sile orijentirane u skladu s lokalnom osi segmenta grede između točaka A i C.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,0}{4,0} \rightarrow \alpha = 26^{\circ}33'54''$$

$$N_3 = (q \cdot 6,0)_x + A_{H,x} - A_{V,x}$$

$$N_3 = 8,0 \cdot 6,0 \cdot \sin \alpha + 5,0 \cdot \cos \alpha - 48,58 \cdot \sin \alpha$$

$$N_3 = 4,21 \text{ kN}$$

$$V_3 = -(q \cdot 6,0)_y + A_{H,y} + A_{V,y}$$

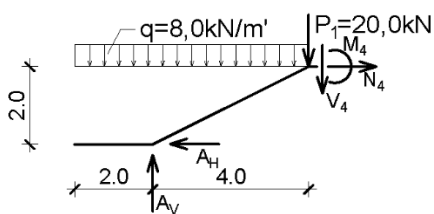
$$V_3 = -8,0 \cdot 6,0 \cdot \cos \alpha + 5,0 \cdot \sin \alpha + 48,58 \cdot \cos \alpha$$

$$V_3 = 2,75 \text{ kN}$$

$$M_3 = A_V \cdot 4,0 + A_H \cdot 2,0 - q \cdot 6,0 \cdot 3,0$$

$$M_3 = 48,58 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 3 = 60,32 \text{ kNm}$$

Presjek 4)



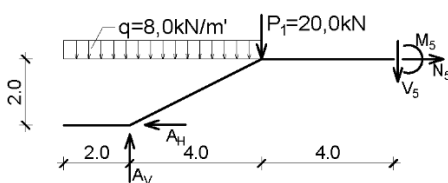
Presjek 4) računamo neposredno iza točke C, na horizontalnom dijelu grede CB.

$$N_4 = A_H = 5,0 \text{ kN}$$

$$V_4 = A_V - q \cdot 6,0 - P_1 \\ = 48,58 - 8 \cdot 6 - 20 = -19,42 \text{ kN}$$

$$M_4 = A_V \cdot 4,0 + A_H \cdot 2,0 - q \cdot 6,0 \cdot 3,0 \\ = 48,58 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 3 = 60,32 \text{ kNm}$$

Presjek 5)



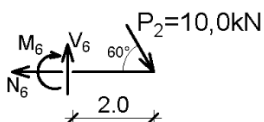
Presjek 5) računamo neposredno prije oslonca B.

$$N_5 = A_H = 5,0 \text{ kN}$$

$$V_5 = A_V - q \cdot 6,0 - P_1 \\ = 48,58 - 8 \cdot 6 - 20 = -19,42 \text{ kN}$$

$$M_5 = A_V \cdot 8,0 + A_H \cdot 2,0 - q \cdot 6,0 \cdot 7,0 - P_1 \cdot 4,0 \\ = 48,58 \cdot 8 + 5 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 7 - 20 \cdot 4 = -17,36 \text{ kNm}$$

Presjek 6)



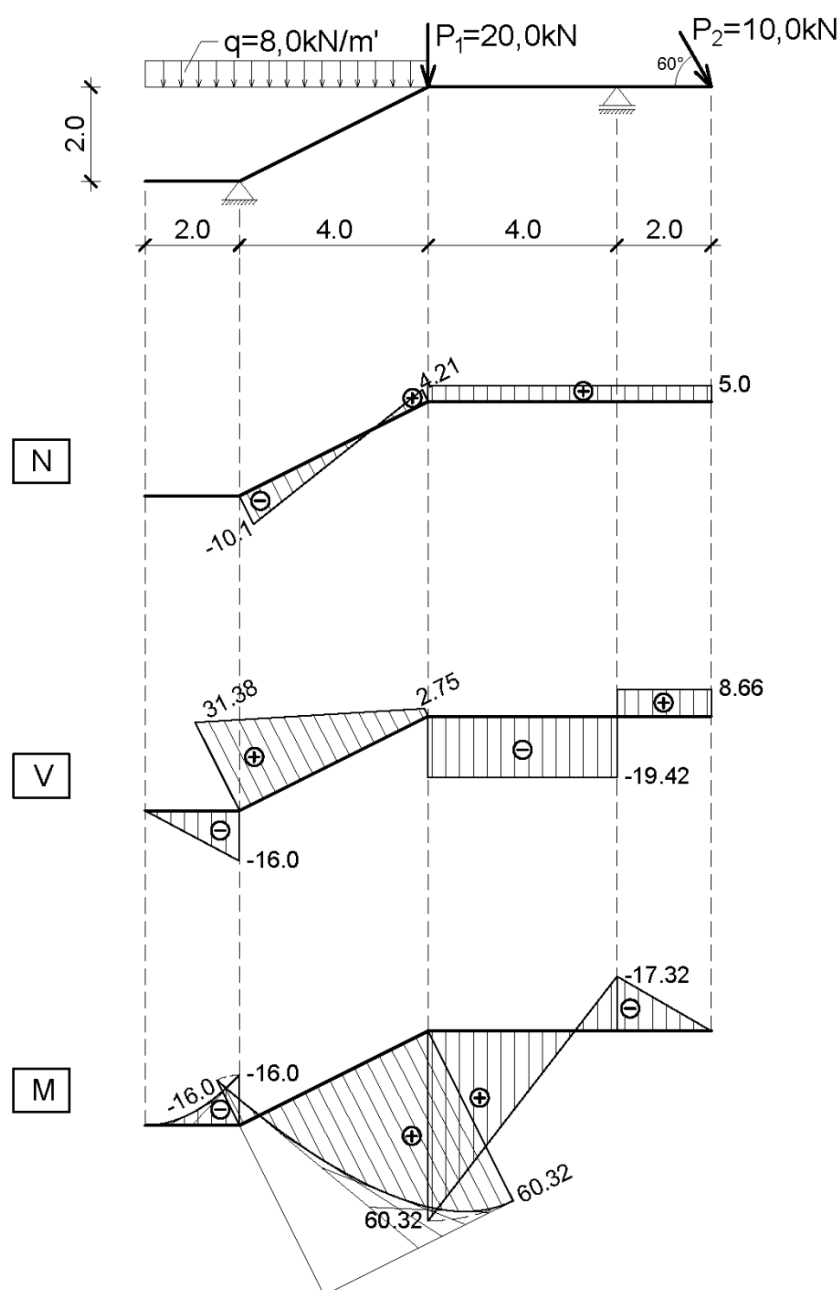
Presjek 6) računamo neposredno iza oslonca B, tako da analiziramo desnu stranu.

$$N_6 = P_2 \cdot \cos 60^{\circ} = 10 \cdot \cos 60^{\circ} = 5,0 \text{ kN}$$

$$V_6 = P_2 \cdot \sin 60^{\circ} = 10 \cdot \sin 60^{\circ} = 8,66 \text{ kN}$$

$$M_6 = -P_2 \cdot \sin 60^{\circ} \cdot 2,0 = -17,32 \text{ kNm}$$

3) Dijagrami unutarnjih sila



Dijagrame crtamo na način kako je objašnjeno u prijašnjim zadacima. Pripazimo da dijagrame crtamo i šrafiramo okomito na os elementa na kojem prikazujemo unutarnje sile.

Dijagram uzdužnih sila lijevo od oslonca A jednak je nuli, u točki A ima skok uslijed djelovanja reakcije A, a zatim se linearno mijenja između točaka A i C, uslijed djelovanja kontinuiranog opterećenja q . Od točke C nadesno do kraja grede uzdužna sila je konstantna i jednaka horizontalnoj komponenti sile P_2 .

Dijagram poprečnih sila mijenja se sukladno silama koje djeluju poprečno na gredu. Najprije dijagram linearno pada na dijelu gdje je greda opterećena kontinuiranim opterećenjem q , nakon čega imamo skok od djelovanja reakcije A.

Nadalje dijagram linearno pada na dijelu gdje je greda opterećena kontinuiranim opterećenjem q , nakon čega opet nastaje skok od djelovanja sile P_1 . Nakon toga dijagram je konstantan do oslonca B gdje dolazi do skoka u smjeru i iznosu reakcije B, da bi nakon toga dijagram bio konstantan do kraja grede, gdje ga sila P_2 vraća u 0.

Na momentnom dijagramu vrijednosti momenta u krajnjim točkama jednake su nuli, a na mjestima oslonaca A i B imamo lom koji nastaje od koncentriranih sila, odnosno reakcija u navedenim osloncima. Lijevo od oslonca A i između točaka A i C, momentni dijagram je krivulja, jer na tom dijelu djeluje kontinuirano opterećenje q . U točki C, gdje djeluje koncentrirana sila P_1 , momentni dijagram ima blagi lom, no to se zbog loma grede ne primjećuje. Na dijelu dijagrama između točaka C i B i do desnog kraja grede nema opterećenja na gredi, pa je momentni dijagram na tom dijelu pravac.

6. Konstrukcijski sustavi

Konstrukcijski sustav predstavlja **mehaničku cjelinu** koja omogućuje **prenošenje opterećenja** s mjesta djelovanja (npr. korisničkog ili atmosferskog opterećenja) do temeljnog tla, pri čemu mora osigurati **ravnotežu, nosivost i stabilnost** konstrukcije. Sustav je sastavljen od međusobno povezanih **nosivih elemenata** (poput greda, stupova, okvira, lukova, rešetki), a način njihove međusobne povezanosti – bilo krut, zgloban ili kombiniran – izravno utječe na ponašanje cijele konstrukcije.

Odabir konstrukcijskog sustava ovisi o:

- vrsti građevine i njezinoj funkciji
- rasponima koje treba premostiti
- opterećenjima koja treba prenijeti
- tehničkim, materijalnim i ekonomskim uvjetima gradnje.

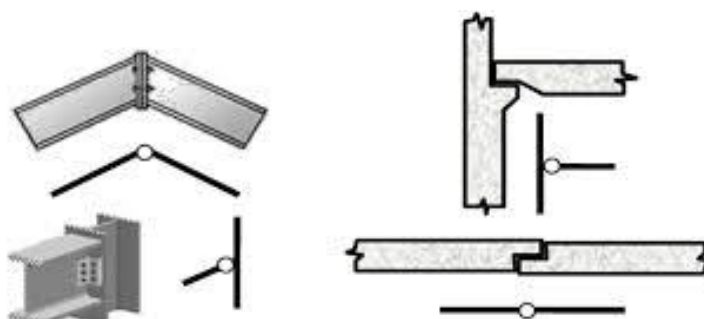
Razumijevanje konstrukcijskih sustava ključno je za pravilno dimenzioniranje, statičku analizu i arhitektonsko oblikovanje nosive strukture građevine.

6.1. Međusobne veze krutih tijela

Konstrukcije nastaju **međusobnim povezivanjem** pojedinih konstrukcijskih elemenata. Te elemente možemo spojiti na dva osnovna načina:

- **krutom vezom**, koja u potpunosti (ili djelomično) **onemogućava rotaciju** jednog elementa u odnosu na drugi
- **zglobnom vezom**, koja **dozvoljava** rotaciju.

Zglobne veze jednostavnije su za izvedbu te se često primjenjuju u **drvenim i čeličnim** konstrukcijama, a gotovo su redovite u **predgotovljenim betonskim konstrukcijama**.



Slika 6.1. Izgled zglobnih veza konstrukcijskih elemenata

Pomoću zglobnog spajanja moguće je oblikovati tzv. **složene (sastavljene) nosače**. Za takve nosače karakteristično je da njihovo ravnotežno stanje ovisi o međudjelovanju više međusobno povezanih elemenata.

I u ovom slučaju moguće je razlikovati:

- **statički određene** nosače – kod kojih se sile mogu izračunati samo pomoću jednadžbi ravnoteže
- **statički neodređene** nosače – kod kojih broj nepoznanica premašuje broj dostupnih jednadžbi ravnoteže.

Ukupan broj **sloboda gibanja** sustava ovisi o broju elemenata sklopa. Svaki samostalan kruti element u ravnini ima **tri slobode gibanja** (dva pomaka i jedna rotacija), pa ukupno:

$$\text{broj sloboda gibanja} = 3n \quad (6.1.)$$

gdje je: n - broj elemenata.

Dio tih gibanja spriječen je:

- u **ležajevima konstrukcije**, koje daju ukupno r reakcija
- u **zglobnim vezama** između elemenata, koje sprječavaju međusobne translacije.

Zglobna veza koja spaja **dva elementa** sprječava oba njihova međusobna translacijska gibanja, dakle **oduzima dvije slobode gibanja**. Ako je u jednom zglobu spojeno više od dvaju elemenata, broj spriječenih sloboda računa se po formuli:

$$2(n_z - 1) \quad (6.2.)$$

gdje je: n_z - broj elemenata spojenih u tom zglobu.

Prema tome, broj preostalih (neeliminiranih) sloboda gibanja sustava izračunava se kao:

$$S = 3n_z - 2z - r \quad (6.3.)$$

gdje je: S - broj preostalih stupnjeva slobode (koji određuje statičku određenost); z - broj zglobnih veza; r - broj reakcija u ležajevima.

Tumačenje vrijednosti izraza S :

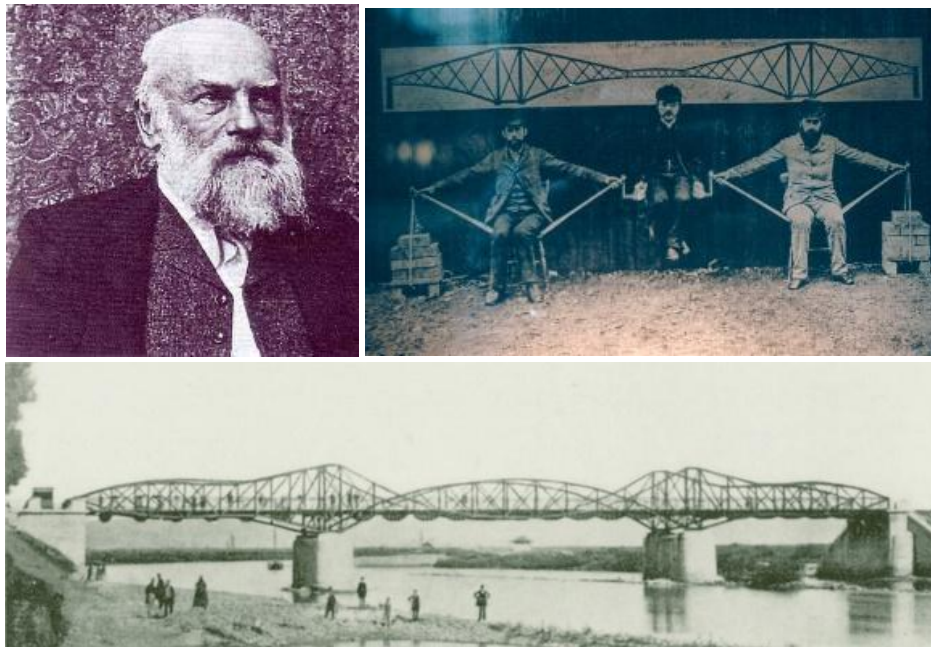
- Ako je $S = 0$, sustav je **statički određen** – ravnoteža je osigurana točno s onoliko veza koliko je potrebno.
- Ako je $S < 0$, sustav je **statički neodređen** – postoji više veza nego što je potrebno, pa je potreban dodatni proračun (npr. pomoću deformabilnosti).
- Ako je $S > 0$, sustav je **nestabilan** – nema dovoljno veza da bi se osigurala ravnoteža.



Slika 6.2. Fotografija okvirne konstrukcije s izvedbom krutog spoja

6.2. Gerberova greda

Njemački inženjer **Heinrich Gerber** (1832. – 1912.) razvio je koncept zglobnog spajanja greda u **odabranim presjecima** kako bi se postiglo povoljnije ponašanje konstrukcije. Zaključio je da se **moment savijanja u poljima** može znatno smanjiti ako se grede međusobno povežu zglobovima na pravim mjestima.



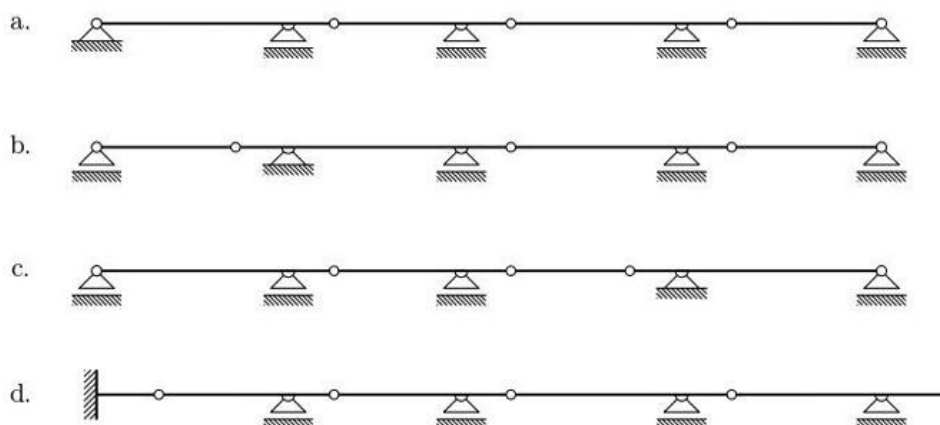
Slika 6.3. Fotografija Heinricha Gerbera (gore lijevo), slikoviti prikaz koncepta nošenja Gerberovih nosača (gore desno) i izgled izvedenog mosta s Gerberovom rešetkastom gredom

Danas se pod **Gerberovom gredom** ili **Gerberovim nosačem** podrazumijeva statički određen, **ravni nosač** sastavljen od više greda spojenih **zglobovima**, koji leži na dva ili više oslonaca.

Takvi nosači **kombiniraju prednosti** kontinuiranih nosača (niži momenti savijanja u poljima) s jednostavnošću statički određenih sustava – pri čemu su **nepovoljni utjecaji slijeganja oslonaca znatno manji** nego kod statički neodređenih nosača jer ne stvaraju dodatne unutarnje sile.

Ključ za pravilno funkcioniranje Gerberove grede je odgovarajući raspored zglobova. Raspored zglobova mora biti takav da osigura stabilnost nosača. Postoje dva osnovna pravila:

1. U **jednom polju** ne smije biti **više od dvaju zglobova**.
2. U **dvama susjednim poljima** ne smiju se nalaziti **po dva zgloba**.



Slika 6.4. Gerberovi nosači - ispravan raspored zglobova

Jedan je od najpoznatijih primjera primjene Gerberova principa **željeznički most preko estuarija rijeke Forth** u istočnoj Škotskoj, dovršen 1890. godine. Ovaj tzv. **konzolni most** smatra se inženjerskim remek-djelom svog doba.



Slika 6.5. Most preko rijeke Forth – primjena Gerberove grede u velikom rasponu

Reakcije u Gerberovim nosačima, kao i u drugim statički određenim zglobno sastavljenim sustavima, moguće je **odrediti primjenom standardnih uvjeta ravnoteže**.

Posebnost je Gerberova nosača u tome što se svaka njegova **jedinica** (između zglobova) analizira zasebno, s vlastitim sustavom sila, dok istovremeno mora biti u ravnoteži i cijeli nosač kao cjelina.

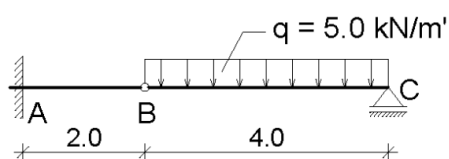
Za svaki segment nosača možemo postaviti **tri jednadžbe ravnoteže**:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$$

što značajno pojednostavljuje analizu – osobito kod ručnih proračuna.

U nastavku su dani primjeri proračuna i crtanja dijagrama unutarnjih sila za uobičajene Gerberove nosače i opterećenja kroz koje će biti objašnjena logika i postupak proračuna unutarnjih sila.

6.2.1. Gerberova greda – 1. primjer



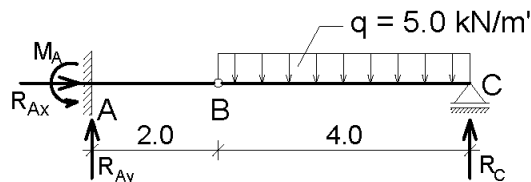
Potrebno je odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

1) Provjera statičke određenosti zadanog sustava

$$S = n \cdot 3 - z \cdot 2 - r = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 4 = 0 \quad \text{- statički određen sustav}$$

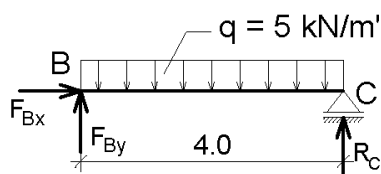
2) Određivanje reakcija

Prije svega potrebno je odrediti reakcije. Pretpostavljamo orijentaciju reakcija te im dodjeljujemo oznake. S obzirom na to da je oslonac A upeti oslonac, kod njega moramo pretpostaviti horizontalnu R_{Ax} i vertikalnu reakciju R_{Ay} te moment upetosti M_A . Oslonac C je klizni, horizontalno pomični ležaj, pa se kod njega javlja isključivo vertikalna reakcija R_C .



Ako postavimo jednadžbe ravnoteže kako smo to do sada radili, uvijek ćemo imati jednu nepoznanicu više od broja jednadžbi. Stoga, kako bismo odredili reakcije, moramo sustav rastaviti u zglobu B i analizirati zasebno desnu i lijevu stranu. Na mjestu zgloba B uvodimo unutarnje sile F_{Bx} i F_{By} koje su zajedničke za obje strane, ali suprotno orijentirane, kako bi ravnoteža bila očuvana. Kako je desna strana BC sama za sebe nestabilna, uvedene unutarnje sile za nju su sile reakcije, dok su za lijevu stranu AB to sile akcije.

Najprije rješavamo desnu stranu:



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{Bx} = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_C \cdot 4,0 - q \cdot 4,0 \cdot 2,0 = 0$$

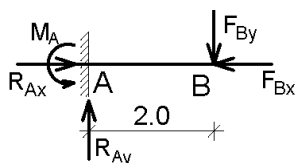
$$R_C = \frac{5 \cdot 4,0 \cdot 2,0}{4,0} = 10,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$q \cdot 4,0 \cdot 2,0 - F_{By} \cdot 4,0 = 0$$

$$F_{By} = \frac{5 \cdot 4,0 \cdot 2,0}{4,0} = 10,0 \text{ kN}$$

Zatim rješavamo lijevu stranu:



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M_A - F_{By} \cdot 2,0 = 0$$

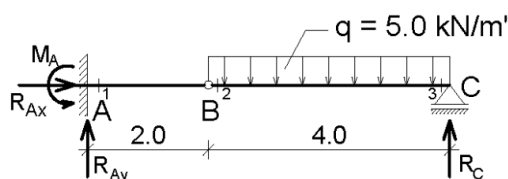
$$M_A = 10 \cdot 2,0 = 20,0 \text{ kNm}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

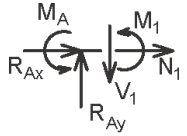
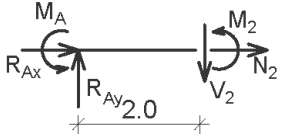
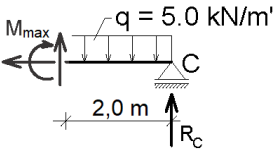
$$R_{Ay} - F_{By} = 0 \quad R_{Ay} = 10,0 \text{ kN}$$

3) Određivanje unutarnjih sila

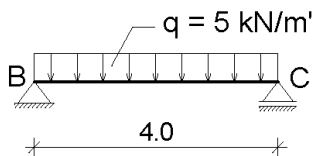
Kada smo riješili reakcije, unutarnje sile rješavamo kao da nema zgloba, dakle analiziramo sustav kao jedinstvenu cjelinu. To ne znači da smo ukinuli zglob, jer je on uključen kod izračuna reakcija, te će (ako smo sve ispravno izračunali) u dijagramima na tom mjestu moment iznositi nula.



Prema pravilima koja su objašnjena u prethodnom poglavlju, presjeke za određivanje unutarnjih sila postavljamo na 3 mjesta gdje postoji promjena opterećenja.

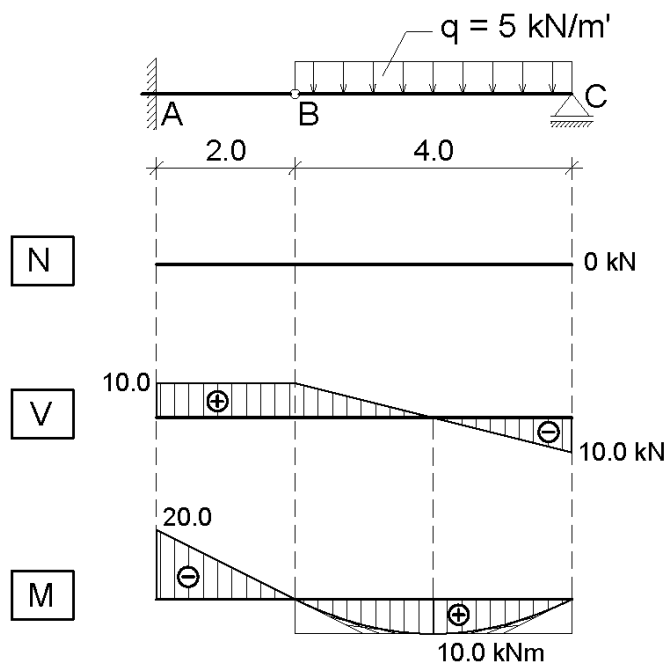
Presjek	Skica	Unutarnje sile
1		$N_1 = -R_{Ax} = 0 \text{ kN}$ $V_1 = R_{Ay} = 10,0 \text{ kN}$ $M_1 = -M_A = -20,0 \text{ kNm}$
2		$N_2 = -R_{Ax} = 0$ $V_2 = R_{Ay} = 10,0 \text{ kN}$ $M_2 = -M_A + R_{Ay} \cdot 2,0 = 0 \text{ kNm}$
3		$N_3 = 0$ $V_3 = -R_C = -10,0 \text{ kN}$ $M_3 = R_C \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$
M_{max}		$x = V/q = 10/5 = 2,0 \text{ m}$ $M_{max} = R_C \cdot 2,0 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 = 10,0 \text{ kNm}$

Maksimalni moment mogli smo dobiti na drugi način ako uočimo kako ranije analizirana desna strana BC predstavlja jednostavnu gredu opterećenu kontinuiranim opterećenjem q . U tom slučaju maksimalni moment možemo izračunati primjenom izraza:



$$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 10,0 \text{ kNm}$$

4) Dijagrami unutarnjih sila

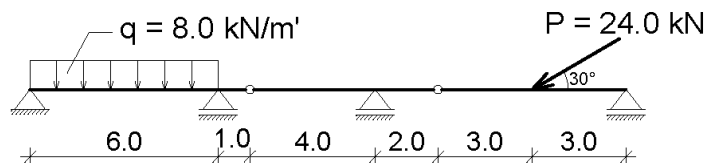


Sva pravila iz prethodnog poglavlja, pomoću kojih možemo provjeriti ispravnost dobivenih dijagrama unutarnjih sila, vrijede i ovdje.

Ako smo sve dobro izračunali, moment na mjestu zgloba u točki B mora biti nula, a u momentnom dijagramu na tom mjestu ne smije biti loma.

Kako je dio nosača BC omeđen zglobovima, dijagrami unutarnjih sila na tom su dijelu identični onima na jednostavnoj (prostoj) gredi.

6.2.2. Gerberova greda – 2. primjer



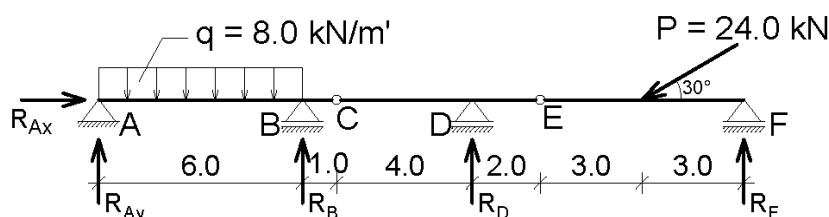
Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

1) Provjera statičke određenosti zadanog sustava

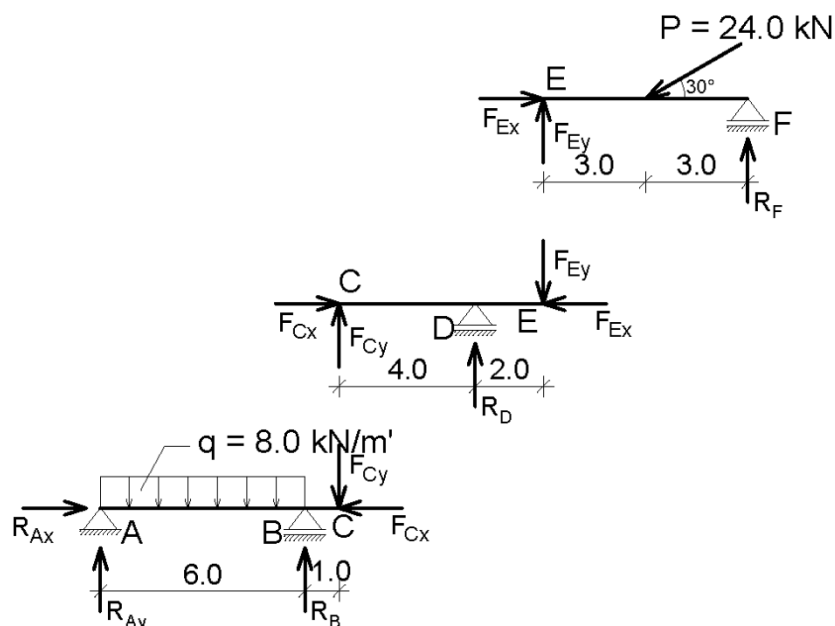
$$S = n \cdot 3 - z \cdot 2 - r = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0 \quad \text{- statički određen sustav}$$

2) Određivanje reakcija

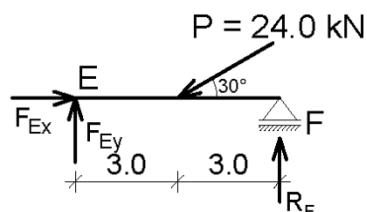
Pretpostavljamo orijentacije reakcija te im dodjeljujemo oznake. S obzirom na to da je oslonac A nepomičan, kod njega moramo pretpostaviti horizontalnu i vertikalnu reakciju, dok su ostali oslonci horizontalno pomični, pa se kod njih javlja isključivo vertikalna reakcija.



Kako bismo odredili reakcije, na mjestu zglobova rastavljamo sustav na tri dijela te u zglobovima pretpostavljamo sile. Pri tome vrijedi sve kao u prethodnom zadatku.



Kod ovakvih nosača uvijek krećemo od izdvojeno nestabilnog dijela, no kako su ovdje dva takva dijela, započet ćemo s krajnjim segmentom EF koji ima manje nepoznanica.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{Ex} = P_x = 24 \cdot \cos 30^\circ$$

$$F_{Ex} = 20,78 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_E = 0$$

$$R_F \cdot 6,0 - P_y \cdot 3,0 = 0$$

$$R_F = \frac{P \cdot \sin 30^\circ \cdot 3,0}{6,0}$$

$$R_F = 6,0 \text{ kN}$$

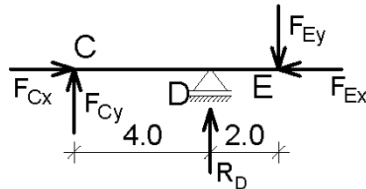
$$\Sigma M_F = 0$$

$$P_y \cdot 3,0 - F_{Ey} \cdot 6,0 = 0$$

$$F_{Ey} = \frac{P \cdot \sin 30^\circ \cdot 3,0}{6,0}$$

$$F_{Ey} = 6,0 \text{ kN}$$

Zatim prelazimo na susjedni centralni dio CE.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{Cx} = F_{Ex} = 20,78 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$R_D \cdot 4,0 - F_{Ey} \cdot 6,0 = 0$$

$$R_D = \frac{6,0 \cdot 6,0}{4,0}$$

$$R_D = 9,0 \text{ kN}$$

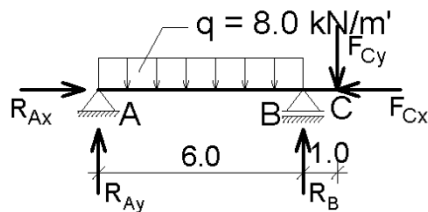
$$\Sigma M_E = 0$$

$$R_D \cdot 2,0 + F_{Cy} \cdot 6,0 = 0$$

$$F_{Cy} = \frac{-9,0 \cdot 2,0}{6,0}$$

$$F_{Cy} = -3,0 \text{ kN}$$

Određivanje reakcija dovršavamo na lijevom segmentu AC.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_{Ax} = F_{Cx} = 20,78 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$R_B \cdot 6,0 - q \cdot 6 \cdot 3 - F_{Cy} \cdot 7 = 0$$

$$R_B = \frac{8 \cdot 6 \cdot 3 + (-3) \cdot 7}{6}$$

$$R_B = 20,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$q \cdot 6 \cdot 4 - R_{Ay} \cdot 7 - R_B \cdot 1 = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 - 20,5 \cdot 1}{7}$$

$$R_{Ay} = 24,5 \text{ kN}$$

Na kraju provedimo kontrolu vertikalnih sila.

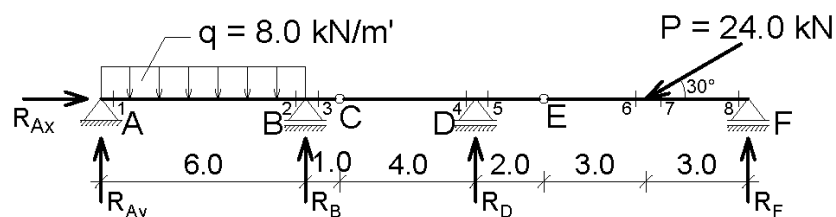
$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_{Ay} + R_B + R_D + R_F - q \cdot 6 - P_y =$$

$$24,5 + 20,5 + 9,0 + 6,0 - 8,0 \cdot 6,0 - P \cdot \sin 30^\circ = 0$$

3) Određivanje unutarnjih sila

Kada smo izračunali reakcije, slijedi izračun unutarnjih sila na čitavom (zadanom) sustavu. U ovom koraku zanemarujemo zglobove, pa presjeke postavljamo pored koncentriranih sila, odnosno na mjestima promjene opterećenja.

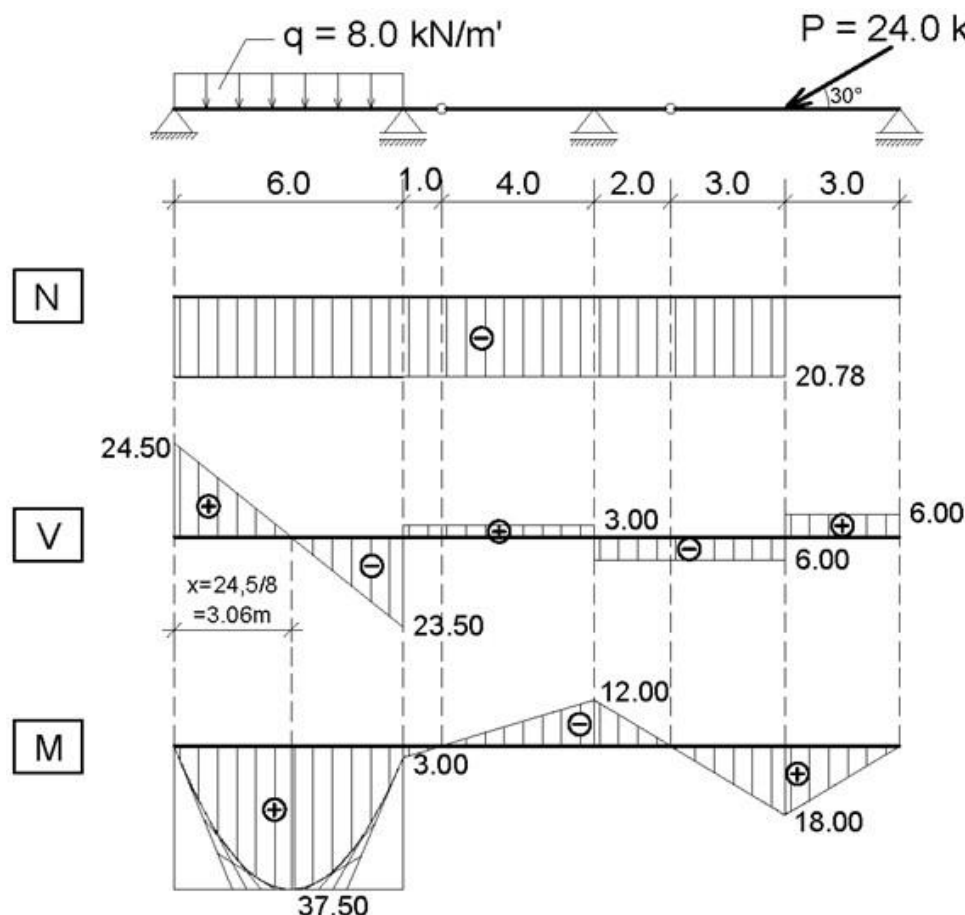


Presj.	Skica	Unutarnje sile
1		$N_1 = -R_{Ax} = -20,78 \text{ kN}$ $V_1 = R_{Ay} = 24,5 \text{ kN}$ $M_1 = R_{Ay} \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$
2		$N_2 = -R_{Ax} = -20,78 \text{ kN}$ $V_2 = R_{Ay} - q \cdot 6 = -23,5 \text{ kN}$ $M_2 = R_{Ay} \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 3,0 \text{ kNm}$
3		$N_3 = -R_{Ax} = -20,78 \text{ kN}$ $V_3 = R_{Ay} - q \cdot 6 + R_B = -3,0 \text{ kN}$ $M_3 = R_{Ay} \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 3,0 \text{ kNm}$
4		$N_4 = -R_{Ax} = -20,78 \text{ kN}$ $V_4 = R_{Ay} - q \cdot 6 + R_B = -3,0 \text{ kN}$ $M_4 = R_{Ay} \cdot 11 - q \cdot 6 \cdot 8 + R_B \cdot 5 = -12,0 \text{ kNm}$
5		$N_5 = -P_x = -20,78 \text{ kN}$ $V_5 = P_y - R_F = 6,0 \text{ kN}$ $M_5 = R_F \cdot 8 - P_y \cdot 5 = -12,0 \text{ kNm}$
6		$N_6 = -P_x = -20,78 \text{ kN}$ $V_6 = P_y - R_F = 6,0 \text{ kN}$ $M_6 = R_F \cdot 3 = 18,0 \text{ kNm}$
7		$N_7 = 0$ $V_7 = -R_F = -6,0 \text{ kN}$ $M_7 = R_F \cdot 3 = 18,0 \text{ kNm}$
8		$N_8 = 0$ $V_8 = -R_F = -6,0 \text{ kN}$ $M_8 = R_F \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$
M_{max}		$x = V/q = 24,5/8 = 3,06 \text{ m}$ $M_{max} = R_{Ay} \cdot 3,06 - q \cdot 3,06 \cdot \frac{3,06}{2} = 37,50 \text{ kNm}$

4) Dijagrami unutarnjih sila

Sva pravila iz prethodnog poglavlja, pomoću kojih možemo provjeriti ispravnost dobivenih dijagrama unutarnjih sila, vrijede i ovdje.

Ako smo sve dobro izračunali, momentni dijagram mora imati nultočke na mjestima zglobova.



6.3. Lučne konstrukcije

Stoljećima su **kamen** i **opeka**, uz **drvo**, bili gotovo jedini dostupni građevni materijali. Osnovni je „nedostatak“ zidanih konstrukcija od kamena ili opeke **vrlo mala ili nikakva vlačna čvrstoća**. Gradnja **vertikalnih** zidanih elemenata pritom ne predstavlja veći problem, ali izvedba **horizontalnih** zidanih elemenata gotovo je nemoguća jer vertikalno opterećenje uzrokuje **savijanje**, a ono posljedično stvara **vlačna naprezanja** koja ti materijali ne mogu podnijeti.

Iako Rimljani nisu prvi otkrili da **lučne forme** omogućuju prijenos vertikalnog opterećenja bez savijanja, oni su – najvjerojatnije preuzevši znanje od Etruščana – značajno unaprijedili razumijevanje i **primjenu luka** u graditeljstvu. U povijesti inženjerstva često ih se smatra prvim **pravim graditeljima svođenih i lučnih konstrukcija**.

Nakon propasti Rimskog Carstva gradnja značajnijih konstrukcija gotovo je zamrla sve do **11. stoljeća**, kada s pojavom **romanike**, a potom **gotike**, ponovno dolazi do snažnog građevinskog zamaha. Taj period obilježen je izgradnjom brojnih **velebnih svođenih i lučnih konstrukcija**.



Slika 6.6. Most svetog Anđela (*Ponte Sant'Angelo*) u Rimu izgrađen 134. g. poslije Krista

Jedan je od vrhunskih primjera iz tog razdoblja **most u Avignonu**, građen između 1177. i 1185. godine. Most je dug gotovo 600 metara, s rasponima lukova od 20 do 35 metara. Njegova posebnost leži u tada **revolucionarnom obliku luka**, koji nije polukružan, već je sastavljen od **triju kružnih odsječaka** različitih središta. Time je postignuto statički znatno povoljnije rješenje od klasičnog polukružnog luka.



Slika 6.7. Lučni kameni most – most u Avignonu iz 12. st.

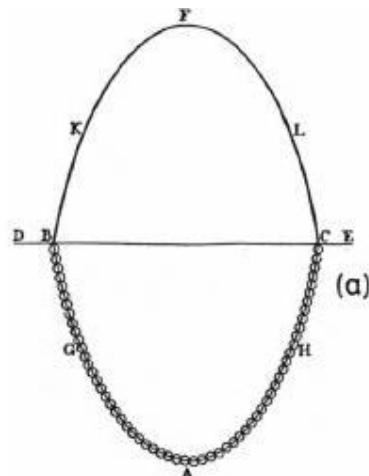
U vrijeme **renesanse**, potaknuti razvojem znanosti i umjetnosti, graditelji postaju smjeliji – grade se **veći rasponi** i razvijaju se nove forme. Umjesto romaničkih **polukružnih** i gotičkih **šiljatih** lukova, sve češće se koristi tzv. **segmentni luk** – luk koji obuhvaća samo dio kruga. U tom periodu **konstrukcije se još uvijek ne proračunavaju**, već se grade na temelju **iskustva, intuicije i pokušaja**, često prenesenih iz generacije u generaciju.

Tek je razvoj mehanike i matematike u **16. i osobito 17. stoljeću** omogućio **znanstveno razumijevanje** ponašanja lučnih konstrukcija. Velik doprinos dao je **Robert Hooke**, engleski fizičar i matematičar, koji je 1675. godine formulisao zapažanje:

„Kao što visi savitljiva nit, tako će – ali obrnuto – stajati kruti luk.“

Drugim riječima, oblik koji tvori **lanac obješen pod vlastitom težinom** (tzv. **lančanica**) predstavlja **idealnu geometriju** luka koji prenosi isto to opterećenje – samo u **tlačnoj** formi. Taj se oblik naziva

tlačna linija ili **potporna linija** i predstavlja krivulju koja spaja hvatišta tlačne sile u poprečnim presjecima luka ili svoda.

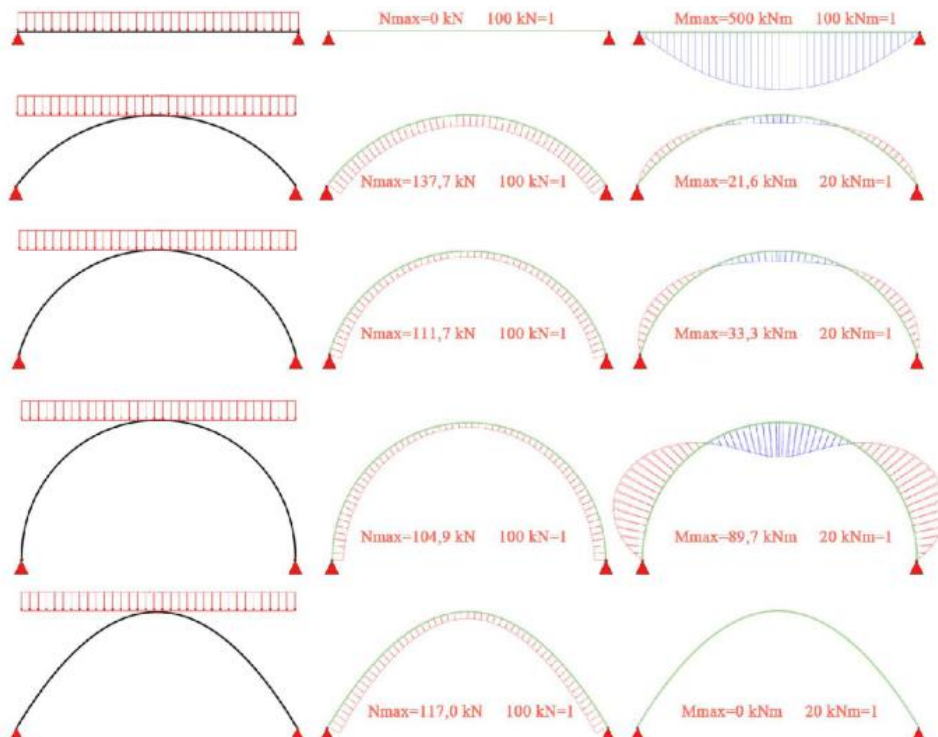


Slika 6.8. Portret Roberta Hookea i usporedba luka s modelom lančаницe

Tlačna linija je **krivulja koja spaja djelovanja tlačnih sila** u poprečnim presjecima luka. Ako se os luka poklapa s potpornom linijom, tada u presjeku djeluje **isključivo uzdužna tlačna sila**, bez savijanja. Međutim, ako između osi i tlačne sile postoji **ekscentricitet**, tada u presjeku luka nastaje moment – a s njim i neželjena **vlačna naprezanja**, što je kod zidanih konstrukcija posebno problematično. U slučaju zidanih lučnih konstrukcija veličina momenta (time i vlačnih naprezanja) treba biti što manja.

Stoga za **zidani luk** vrijedi sljedeće pravilo: Konstrukcija je stabilna **dokle god se potporna linija nalazi unutar geometrijskog presjeka luka**.

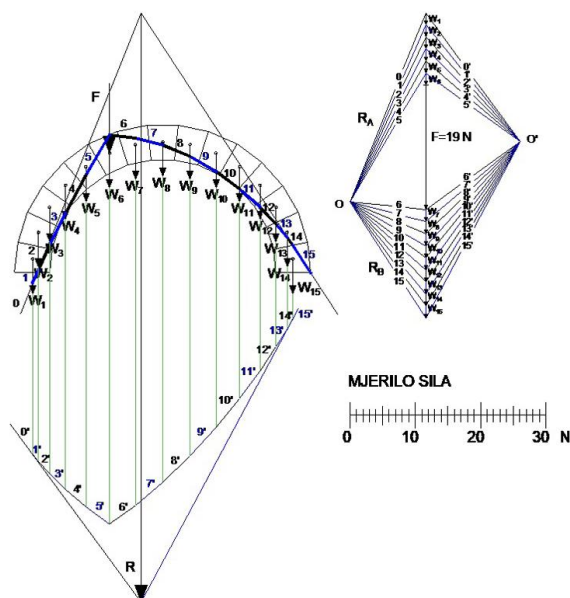
Iz tog razloga možemo reći da se **proračun zidanih lučnih konstrukcija svodi na geometrijski problem**, dok je proračun čvrstoće **manje značajan** jer materijal sam po sebi ne podnosi savijanje.



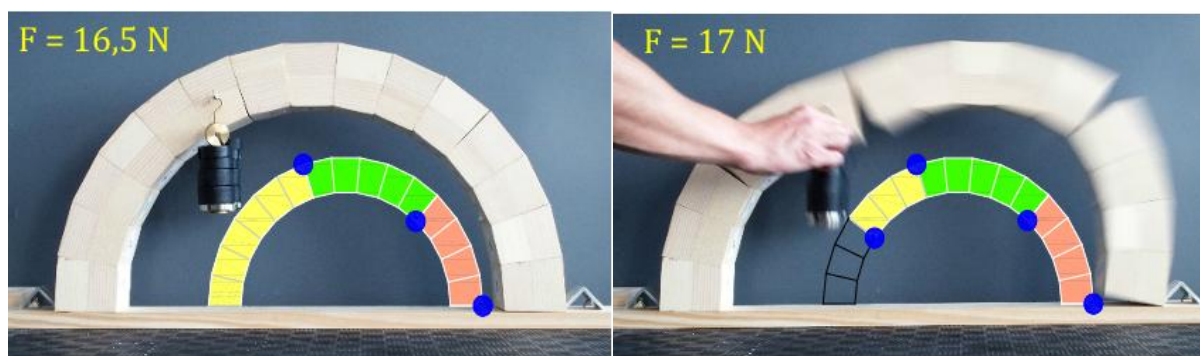
Slika 6.9. Prikaz različitih oblika lukova opterećenih jednolikim opterećenjem i usporedba dijagrama uzdužnih sila i momenata savijanja u pojedinim presjecima – vidljiv utjecaj oblikovanja luka

Tlačna linija može se konstruirati **grafički**, pomoću tzv. **verižnog poligona**. Iako se u današnje vrijeme takvim postupkom rijetko koristimo u praksi, i dalje je vrlo koristan za:

- **preliminarnu analizu** konstrukcije
- **bolje razumijevanje** ponašanja lučnih i svodnih oblika.



Slika 6.10. Verižni poligon kao alat za određivanje statičke stabilnosti luka



Slika 6.11. Prikaz otkazivanja tlačnog luka formiranjem mehanizma nastankom prevelikog broja zglobova uslijed momenta savijanja zbog ekscentričnog opterećenja

Lučne konstrukcije u pravilu su statički neodređeni sustavi. **Trozglobni luk** poseban je oblik lučne konstrukcije kod koje se uvode **tri zgloba** – dva na osloncima i jedan u tjemenu luka. Uvođenjem trećeg, središnjeg zgloba luk postaje **statički određen**, što znači da se sve nepoznate veličine (reakcije i unutarnje sile) mogu odrediti isključivo primjenom **triju uvjeta ravnoteže**:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$$

Posebnost trozglobnog luka u tome je što se njegov **unutarnji statički višak eliminira** pomoću središnjeg zgloba, čime se izbjegava potreba za dodatnim metodama (npr. metoda deformacija) pri proračunu. Ovaj tip luka izuzetno je **pogodan za konstrukcije na temeljima koji nisu kruto utemeljeni**, jer dopušta **rotaciju i prilagodbu** eventualnim slijeganjima bez pojave dodatnih naprezanja.

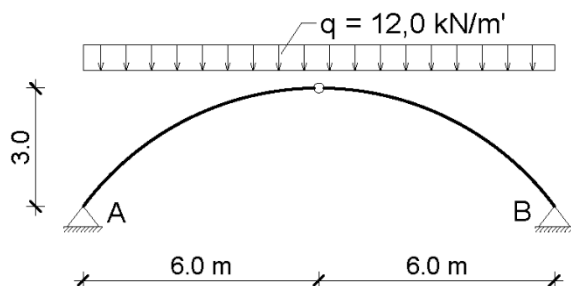
U proračunu trozglobnog luka koristi se ravnoteža za cijeli luk i posebno za **jedan od dijelova** koji nastaje "rezanjem" u središnjem zglobu. Time se jednostavno određuju reakcije i unutarnje sile (normalna sila, poprečna sila i moment – koji je u samom zglobu uvijek jednak nuli).

Zbog jednostavnosti analize i prilagodljivosti tlu, trozglobni lukovi bili su posebno popularni u prvim fazama **betonskog i čeličnog graditeljstva**, osobito kod mostova i velikih raspona.



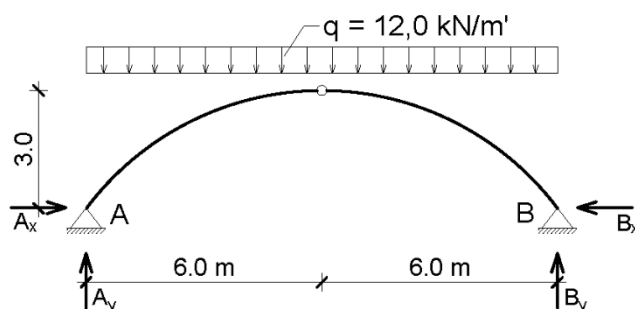
Slika 6.12 . Most Saldinatobel u Švicarskoj, Robert Maillart, 1930. g. – primjer trozglobnog luka
Slijedi primjer proračuna trozglobnog luka, tj. proračun reakcija i dijagrama unutarnjih sila.

6.3.1 Lučne konstrukcije – 1. primjer



Zadan je trozglobni lučni nosač. Treba odrediti reakcije te odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

1) Određivanje reakcija



Na zadanom trozglobnom luku, kao i kod trozglobnog okvira, uslijed samo vertikalnog opterećenja nastaju vertikalne i horizontalne reakcije. Određivanje reakcija započinjemo s vertikalnim reakcijama koje računamo kao i do sada.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$B_y \cdot 12,0 - q \cdot 12,0 \cdot 6,0 = 0$$

$$B_y = \frac{12,0 \cdot 12,0 \cdot 6,0}{12,0} = 72,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$q \cdot 12,0 \cdot 6,0 - A_y \cdot 12,0 = 0$$

$$A_y = \frac{12,0 \cdot 12,0 \cdot 6,0}{12,0} = 72,0 \text{ kN}$$

Kako bismo odredili horizontalne komponente reakcija, moramo „upotrijebiti“ zglob C, što radimo na isti način kao i kod trozglobnih okvira.

$$\Sigma M_C^d = 0$$

$$B_y \cdot 6,0 - B_x \cdot 3,0 - q \cdot 6,0 \cdot 3,0 = 0$$

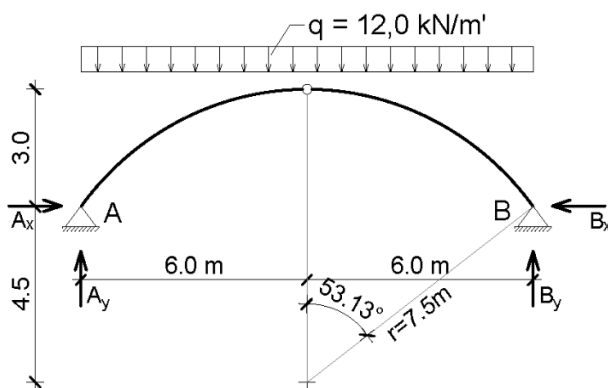
$$B_x = \frac{72,0 \cdot 6,0 - 12,0 \cdot 6,0 \cdot 3,0}{3,0} = 72,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$A_x - B_x = 0$$

$$A_x = B_x = 72,0 \text{ kN}$$

2) Određivanje unutarnjih sila

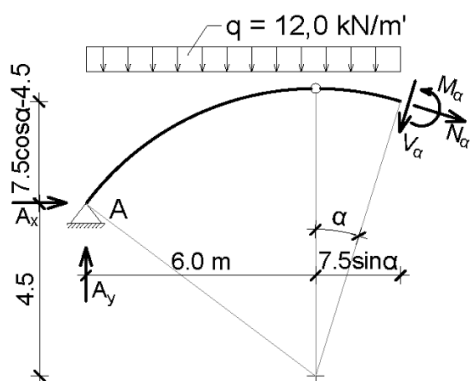


Kako bismo odredili unutarnje sile, moramo definirati kružnicu koja formira zadani lučni nosač. Ako je $a=12\text{m}$ tetiva kružnice, $h=3\text{m}$ visina kružnog odsječka, polumjer kružnice r dobivamo pomoću izraza:

$$a = 2\sqrt{2hr - h^2}$$

$$r = \frac{a^2/4 + h^2}{2h} = \frac{12^2/4 + 3^2}{2 \cdot 3} = 7,5 \text{ m}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{a}{2 \cdot r} = \sin^{-1} \frac{12}{2 \cdot 7,5} = 53,13^\circ$$



Unutarnje sile određujemo u presjeku definiranom kutom α koji zatvara kružni isječak od vertikale do točke presjeka. Odbacujemo desnu stranu i na mjestu presjeka uvodimo unutarnje sile kao funkciju kuta α . Analiziramo desnu polovicu, a za lijevu stranu vrijedi pravilo simetrije.

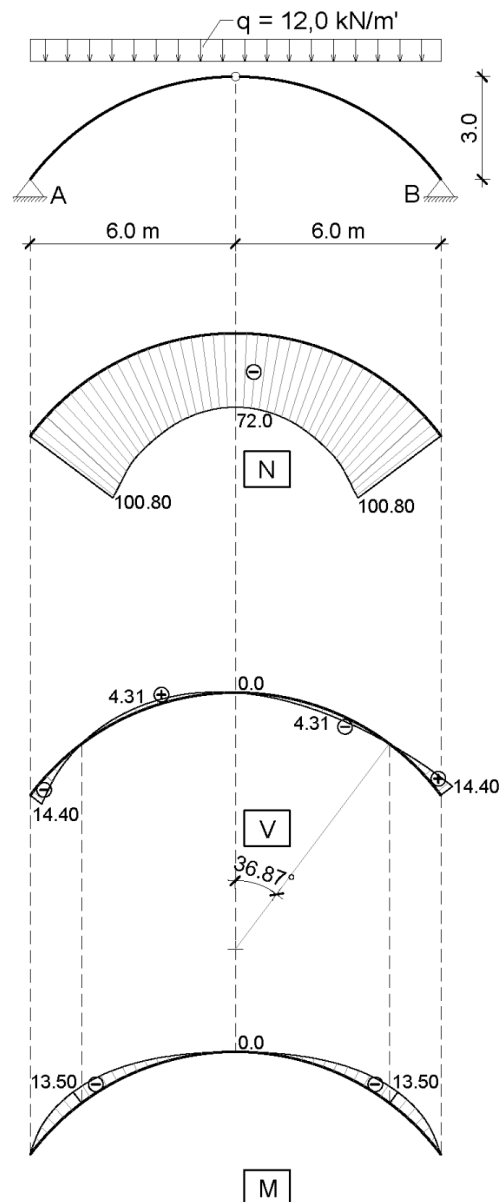
$$N_{\alpha} = [A_y - q \cdot (6 + 7.5 \sin \alpha)] \cdot \sin \alpha - A_x \cdot \cos \alpha$$

$$V_{\alpha} = [A_y - q \cdot (6 + 7.5 \sin \alpha)] \cdot \cos \alpha + A_x \cdot \sin \alpha$$

$$M_{\alpha} = A_y \cdot (6 + 7.5 \sin \alpha) - A_x \cdot (7.5 \cos \alpha - 4.5) - q \cdot \frac{(6 + 7.5 \sin \alpha)^2}{2}$$

α [°]	N [kN]	V [kN]	M [kNm]
0	-72,00	0,00	0,00
15	-75,58	-3,87	-4,21
30	-84,85	-2,97	-12,03
36,87	-90,00	0,00	-13,50
45	-95,91	5,91	-10,59
53,13	-100,80	14,40	0,00

3) Dijagrami unutarnjih sila



6.4. Lančanice

Razvojem **čelika** i pojavom **čeličnih** i **armiranobetonskih konstrukcija** nestao je problem materijala **niskih vlačnih čvrstoća**. Time je prestala i nužnost korištenja svodova i lukova kao osnovnog konstruktivnog rješenja. Takvi oblici danas se zadržavaju **prvenstveno kao arhitektonski izričaj**, a ne kao tehnička potreba.

Međutim, materijali visoke vlačne čvrstoće otvorili su nove mogućnosti – osobito za **vlačne lučne sustave**, poznate kao **lančanice**.

Moderne lančanice najčešće se izvode od **čelične užadi**, koja zbog svojih karakteristika pripada skupini **vitkih konstrukcijskih elemenata**, odnosno elemenata kod kojih je **duljina znatno veća od preostalih dimenzija** presjeka.

Užad ima **iznimno malu krutost** na savijanje i smicanje, zbog čega **ne može preuzeti ni momente ni poprečne sile**. Zbog toga lančanice opterećenje prenose **isključivo putem vlačnih sila**, koje djeluju uzdužno kroz njihovu os.

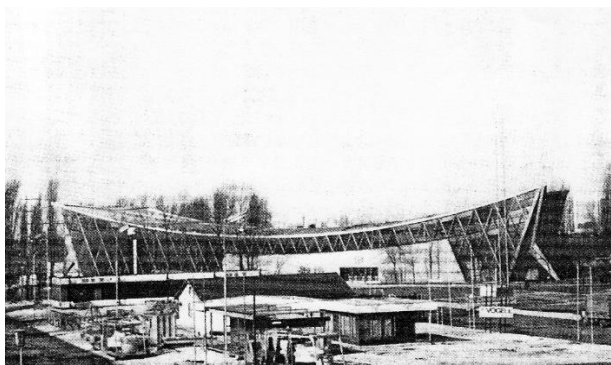


Slika 6.13. Viseći most 1915 Çanakkale Köprüsü u Turskoj (2022. g.) - primjer lančanice

Za razliku od **tlačnih lučnih konstrukcija**, koje pod djelovanjem opterećenja teže „izravnati“ se i pri tome **gurnuti oslonce prema van** (stvarajući tzv. **bočni potisak**), lančanice, kao vlačne konstrukcije, imaju suprotan efekt – **teže privući oslonce jedan prema drugome**.

Da bi se ta unutarnja tendencija **spriječila**, potrebno je predvidjeti **nepomične oslonce** koji će, zahvaljujući svojoj **krutosti**, moći generirati **dovoljno velike reakcije** koje se suprotstavljaju silama zatezanja.

Kao zanimljiva paralela može poslužiti **kontrafora** – karakterističan arhitektonski i konstruktivni element gotičkih katedrala. Njezina je uloga bila upravo ta: **spriječiti razmicanje oslonaca svodova**, tj. neutralizirati bočni potisak.



a) Vitićev paviljon u Zagrebu, Ivan Vitić, 1957. g.



b) Paviljon u Lisabonu, A. Siza Vieira, 1998. g.

Slika 6.14. Primjeri modernih lančanica izvedenih od čelične užadi

Na fotografijama **Vitićeva** i **Sizinog paviljona** (slika 6.14.) jasno su vidljiva **два različita pristupa osiguravanju nepomičnosti oslonaca** kod **ovješanih vlačnih krovnih konstrukcija**. U oba slučaja odabrano rješenje postaje i **sastavni dio arhitektonske kompozicije** jer su reakcije koje se javljaju u osloncima često **vrlo velike**, a njihov prijenos uvjetuje oblik i dimenzioniranje cijele konstrukcije.

Osnovni proračun lančanice

1. Zadano:

- razmak oslonaca L
- visina ulegnuća (strelice) f - udaljenost od oslonca do najniže točke
- težina po duljini užeta q (npr. kN/m).

2. Sila u sredini (horizontalna komponenta):

$$H = \frac{q \cdot L^2}{8f} \quad (6.4.)$$

3. Najveća sila u lančanici (u osloncu):

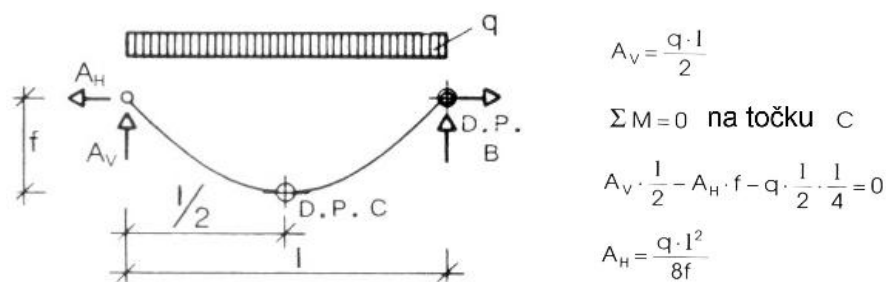
$$N_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(q \cdot \frac{L}{2}\right)^2} \quad (6.5.)$$

4. Duljina lančanice (približno):

$$s \approx L + \frac{8 \cdot f^2}{3L} \quad (6.6.)$$

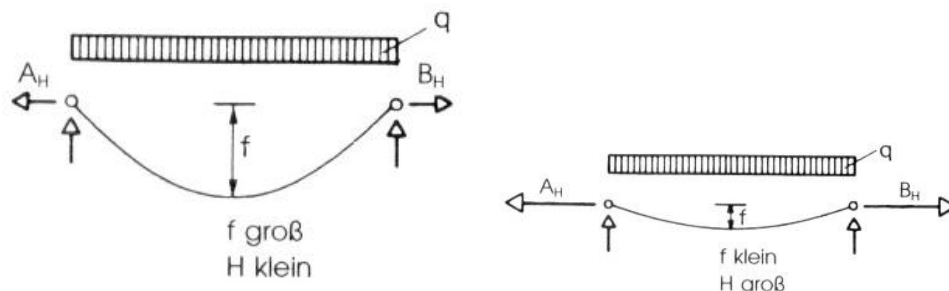
Važno je istaknuti:

- **Veličina reakcije na osloncu lančanice ovisi o visini strelice luka**, tj. udaljenosti tjemena lančanice od ravne crte koja spaja oslonce (tzv. horizontalna osnova luka).



Slika 6.15. Prikaz proračuna reakcija i sile u lančanici ovisno o opterećenju i strelici luka

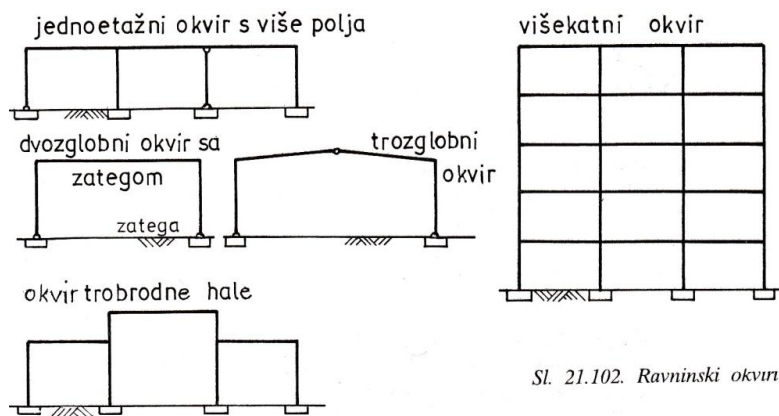
- Što je **strelica manja** (luk plići), to su **reakcije veće**. Zbog toga su **duboke lančanice** statički povoljnije – iako zahtijevaju više prostora ili viših konstruktivnih visina.



Slika 6.16. Grafički prikaz utjecaja strelice luka na vrijednost sile H u lančanici

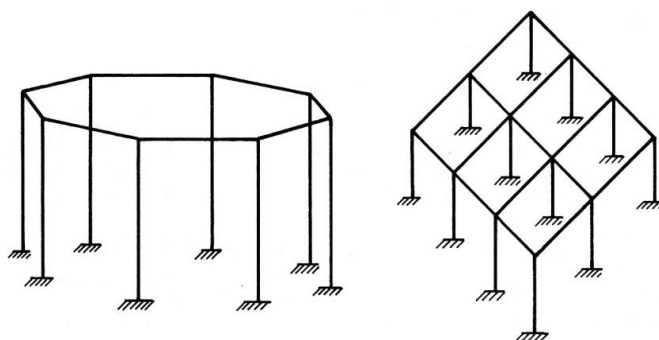
6.5. Okvirne konstrukcije

Okvirne konstrukcije definiramo kao sustave sastavljene od vertikalnih i horizontalnih elemenata (stupova i greda), međusobno kruto povezanih u čvorovima. Osnovni okvir, sastavljen od dviju vertikala (stupova) i horizontalnog nosača (grede), nazivamo portalnim okvirom. Nizanjem takvih okvira oblikuju se višeraspanske ili višekatne ravninske, odnosno prostorne konstrukcije.



Sl. 21.102. Ravninski okvir

a) Ravninski okviri



b) Prostorni okviri

Slika 6.17. Različiti sustavi okvira nastali nizanjem portalnih okvira

Jednokatni ravninski okviri čest su odabir za konstrukcije sportskih dvorana i trgovačkih centara. Kod višekatnih zgrada, zbog mogućnosti fleksibilnog tlocrtnog rasporeda (bez nosivih zidova), okvirne konstrukcije vrlo su čest izbor nosivog sustava, osobito kod javnih i poslovnih građevina. U slučaju visokih zgrada (nebodera), okvirne konstrukcije gotovo su isključivo sustav nosive konstrukcije.



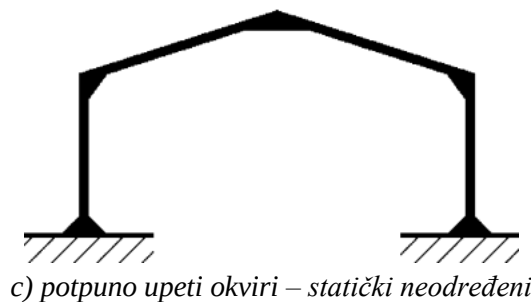
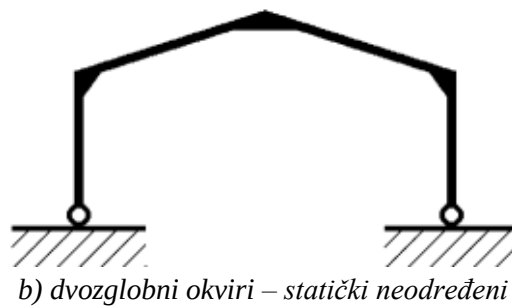
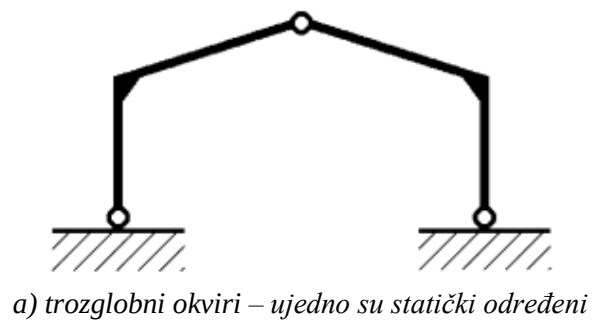
Slika 6.18. World Trade Center u New Yorku - visoka zgrada s okvirnom konstrukcijom

Prvim neboderom smatra se zgrada *Home Insurance Building* u Chicagu iz 1885. godine, visoka 42 metra, s čeličnom prostornom okvirnom konstrukcijom.



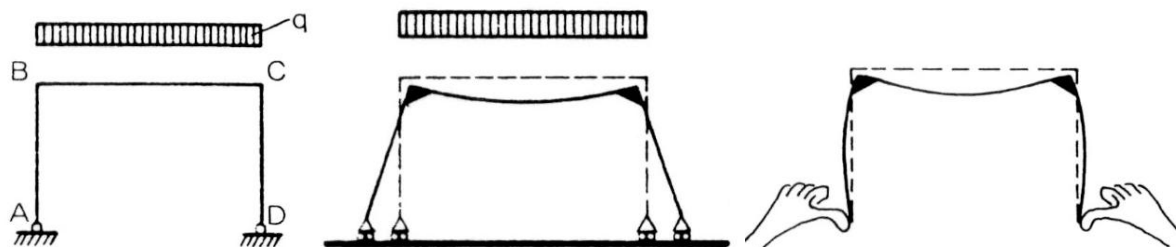
Slika 6.19. *Home Insurance* u Chicagu (1885. g.) – prva zgrada s okvirnom čeličnom konstrukcijom

Postoje tri osnovna tipa portalnih okvira: trozglobni, dvozglobni i upeti okvir. Dvozglobni i upeti okvir statički su neodređeni, dok je trozglobni okvir — sastavljen od dvaju elemenata spojenih zglobno — statički određen.



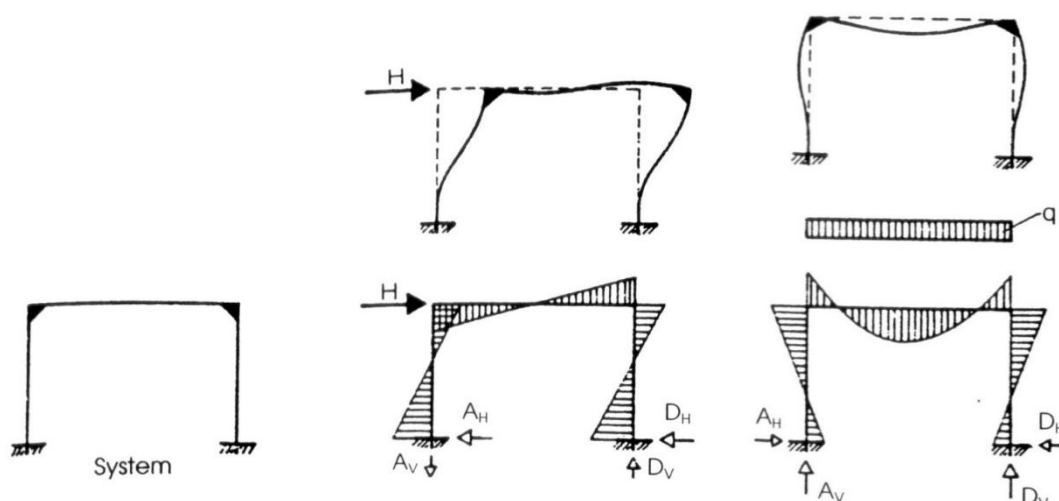
Slika 6.20. Prikaz portalnih okvira: a) trozglobni, b) dvozglobni i c) upeti

Okvirne konstrukcije, poput lučnih, odolijevaju horizontalnim opterećenjima u svojoj ravnini. Još jedna sličnost s lukovima jest potreba za nepomičnim osloncima jer vertikalno opterećenje izaziva bočni potisak koji ih razmiče (slika 6.21.). Međutim, za razliku od lučnih konstrukcija kod kojih otpornost ovisi uglavnom o uzdužnim silama, kod okvira je presudna otpornost na **savijanje**, uz znatan utjecaj momenta savijanja i poprečnih sila.



Slika 6.21. Ponašanje dvozglobnog okvira uslijed opterećenja – prisutnost horizontalnih reakcija

U prethodnim smo poglavljima istaknuli da se, ako poštujemo dogovor o predznaku, dijagram momenta savijanja uvijek crta na strani zatezanja deformiranog nosača. Na slici 6.22. prikazana je ta ovisnost između deformacijske linije i momentnog dijagrama na primjeru upetog okvira pod tipičnim opterećenjima. Važno je zapaziti da pravi kut između stupa i grede u krutom spoju ostaje nepromijenjen.



Slika 6.22. Prikaz deformiranja i momenata savijanja krutog portalnog okvira

Od svih vrsta okvira ovdje ćemo se detaljnije baviti trozglobnim okvirom. Kao što je već rečeno, **trozglobni okvir** je statički određena konstrukcija sastavljena od dvaju krutih elementa (npr. stupova i grede), međusobno povezanih u tri zgloba — dva na osloncima i jedan u vrhu okvira.

Osnovne značajke:

- Statika se rješava pomoću **triju jednadžbi ravnoteže** ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$).
- Zglob u vrhu omogućuje **slobodno zakretanje**, čime se eliminira unutarnji moment u spoju.
- Zbog toga je konstrukcija **otporna na temperaturne promjene i slijeganja temelja**.
- Često se koristi za **nadstrešnice, hale, hangare** i slične konstrukcije srednjih raspona.

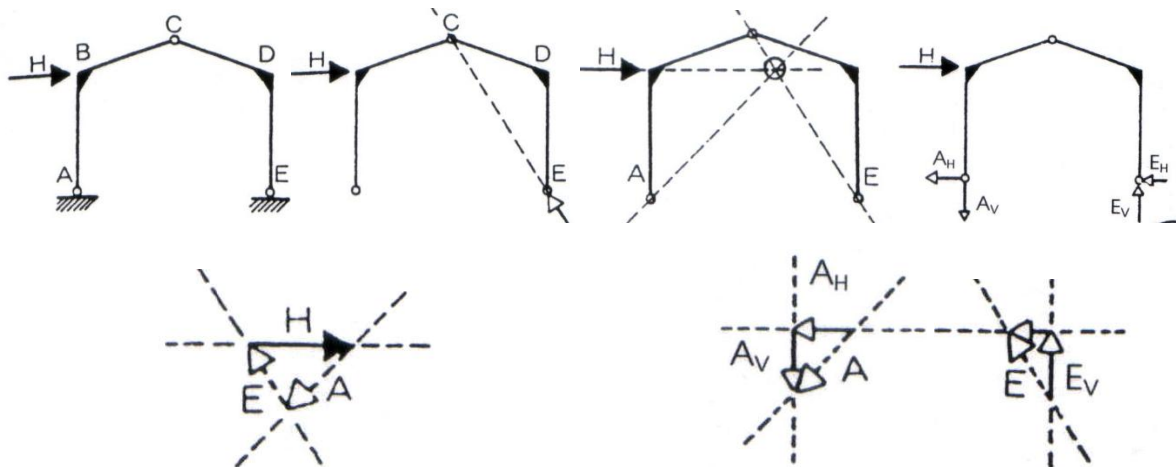
Statičke karakteristike:

- U zglobovima nema momenta → **moment savijanja javlja se samo unutar elemenata**.
- Konstrukcija je **stabilna i određena**, ali osjetljivija na deformacije u odnosu na upete sustave.
- Lako se rješava **analitički ili grafički**, što je čini odličnom za učenje.

Reakcije u trozglobnom okviru analitički određujemo po istim principima koji su opisani za Gerberov nosač i vrijede za sve sastavljene sustave. Pravila za crtanje dijagrama unutarnjih sila ostaju nepromijenjena.

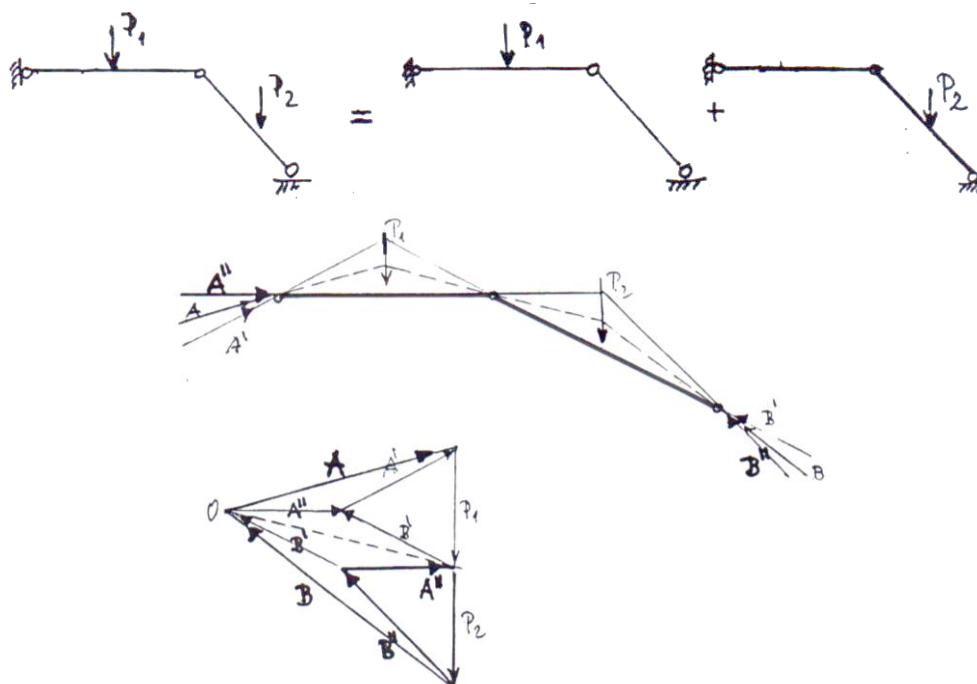
U nekim je slučajevima lakše odrediti reakcije **grafički**. Izdvojimo li desnu stranu trozglobnog okvira, vidimo da na nju djeluju samo dvije sile: reakcija u osloncu E i sila u zglobu C. Budući da su samo dvije sile u pitanju, za ravnotežu moraju ležati na istom pravcu – dakle, obje leže na liniji EC.

Na lijevoj strani nalazimo tri sile: horizontalnu silu H, reakciju u A i silu u zglobu C. Tri su sile u ravnoteži samo ako im se pravci sijeku u jednoj točki i ako zatvaraju poligon sila. Budući da je pravac sile u C poznat, reakcija u A mora prolaziti kroz sjecište pravaca H i C. Kada odredimo pravac sile A, možemo zatvoriti poligon sila i grafički odrediti sve sile u sustavu.



Slika 6.23. Prikaz grafičkog određivanja reakcija trozglobnog okvira

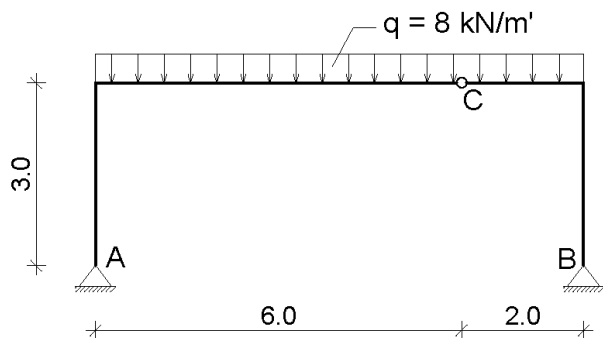
Kada vanjsko opterećenje djeluje istovremeno s obje strane okvira, izdvajanje jedne strane daje sustav s tri si, od kojih je samo jedna (vanjska) na poznatom pravcu. U tom slučaju koristimo se **pravilom superpozicije**: zadatak rješavamo parcijalno – najprije računamo reakcije za opterećenje s jedne strane, zatim za opterećenje s druge strane, a potom zbrajamo dobivene reakcije u konačne vrijednosti.



Slika 6.24. Primjena principa superpozicije kod proračuna trozglobnog okvira

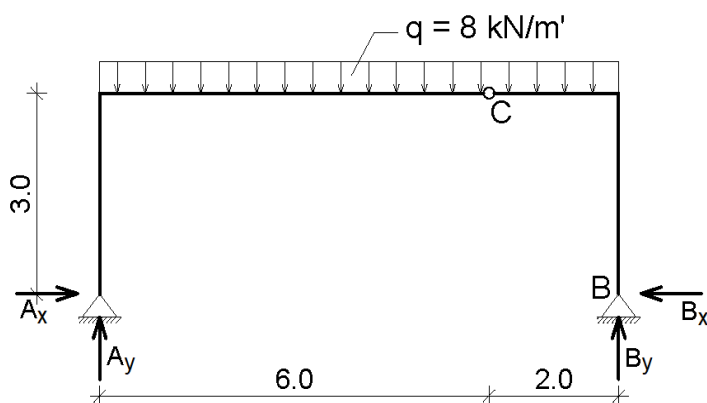
Proračun trozglobnih okvira pokazat će se na sljedećim primjerima za različite geometrije i opterećenja.

6.5.1 Okvirne konstrukcije – Primjer 1



Potrebno je odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila trozglobnog okvira.

1) Određivanje reakcija



Kako je ranije objašnjeno, kod zadanog trozglobnog okvira uslijed samo vertikalnog opterećenja nastaju vertikalne i horizontalne reakcije. Stoga im pretpostavimo orijentaciju i dajemo oznake.

Određivanje reakcija započinjemo s vertikalnim reakcijama koje računamo kao i do sada.

$$\sum M_A = 0$$

$$B_y \cdot 8,0 - q \cdot 8,0 \cdot 4,0 = 0$$

$$B_y = \frac{8,0 \cdot 8,0 \cdot 4,0}{8,0} = 32,0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$q \cdot 8,0 \cdot 4,0 - A_y \cdot 8,0 = 0$$

$$A_y = \frac{8,0 \cdot 8,0 \cdot 4,0}{8,0} = 32,0 \text{ kN}$$

Kako bismo odredili horizontalne komponente reakcija, moramo „upotrijebiti“ zglob C. Pri tome nema potrebe za rastavljanjem sustava na dva dijela kako se radi kod Gerberovih nosača. Dovoljno je postaviti sumu momenata na zglob C i pri tome analizirati samo jednu stranu, u ovom slučaju to je desna strana. Kako ne radimo skicu, kod sume momenata stavimo indeks d koji označava kako je analizirana desna strana. Kada odredimo horizontalnu reakciju B_x , drugu horizontalnu reakciju A_x dobijemo iz uvjeta ravnoteže horizontalnih sila.

$$\sum M_C^d = 0$$

$$B_y \cdot 2,0 - B_x \cdot 3,0 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 = 0$$

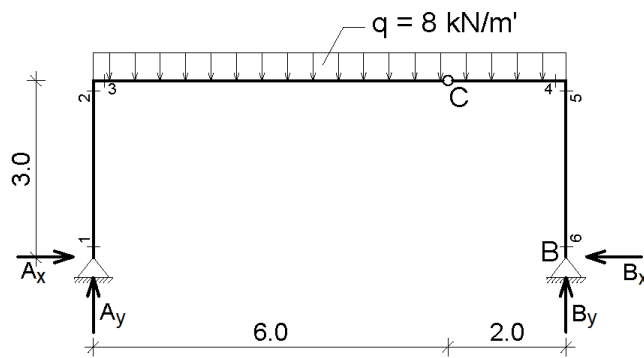
$$B_x = \frac{32,0 \cdot 2,0 - 8,0 \cdot 2,0 \cdot 1,0}{3,0} = 16,0 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x - B_x = 0$$

$$A_x = B_x = 16,0 \text{ kN}$$

2) Određivanje unutarnjih sila



Kada odredimo reakcije, moramo definirati pozicije presjeka u kojima izračunavamo vrijednosti unutarnjih sila. Presjeke definiramo kao i do sada na mjestima promjene opterećenja, no moramo ih postaviti i na mjestima promjene geometrije (kutovi, odnosno lomovi). Razlog tome leži u pravilu da je uzdužna sila orijentirana u smjeru osi grede, pa nećemo imati iste vrijednosti unutarnjih sila u presjecima 2 i 3, odnosno 4 i 5.

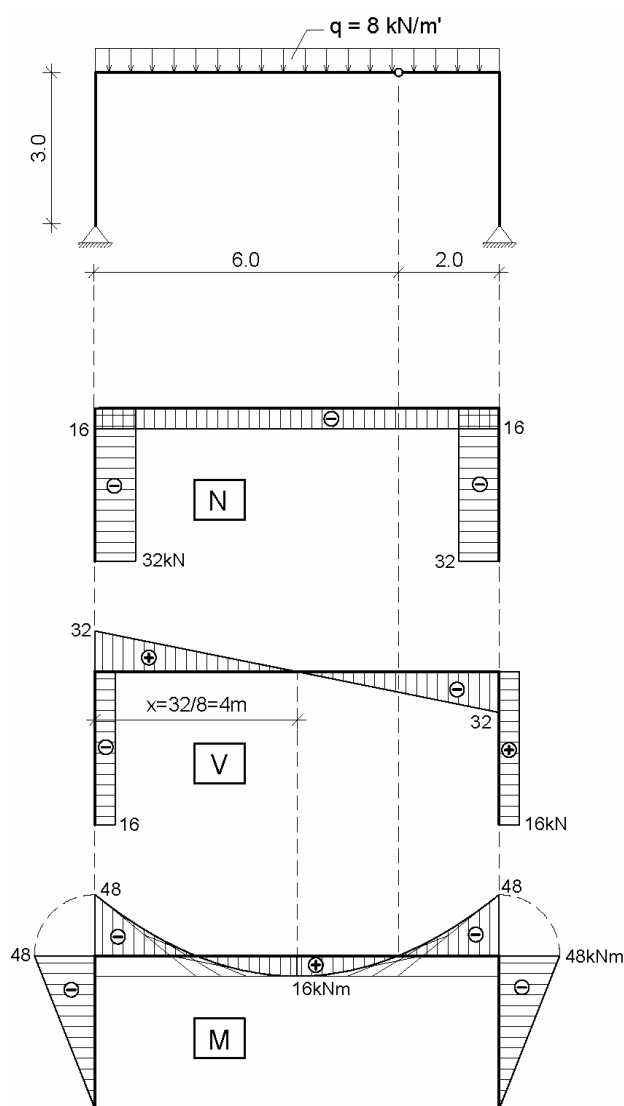
Kao i kod Gerberovih nosača, unutarnje sile kod okvira rješavamo kao da nema zgloba.

Presjek	Skica	Unutarnje sile
1		$N_1 = -A_y = -32,0 \text{ kN}$ $V_1 = -A_x = -16,0 \text{ kN}$ $M_1 = 0 \text{ kNm}$
2		$N_2 = -A_y = -32,0 \text{ kN}$ $V_2 = -A_x = -16,0 \text{ kN}$ $M_2 = -A_x \cdot 3,0 = -48,0 \text{ kNm}$
3		$N_3 = -A_x = -16,0 \text{ kN}$ $V_3 = A_y = 32,0 \text{ kN}$ $M_3 = -A_x \cdot 3,0 = -48,0 \text{ kNm}$
4		$N_4 = -A_x = -16,0 \text{ kN}$ $V_4 = A_y - q \cdot 8 = -32,0 \text{ kN}$ $M_4 = A_y \cdot 8 - A_x \cdot 3 - q \cdot 8 \cdot 4 = -48,0 \text{ kNm}$
5		$N_5 = -B_y = -32,0 \text{ kN}$ $V_5 = B_x = 16,0 \text{ kN}$ $M_5 = -B_x \cdot 3,0 = -48,0 \text{ kNm}$

Presjek	Skica	Unutarnje sile
6		$N_6 = -B_y = -32,0 \text{ kN}$ $V_6 = B_x = 16,0 \text{ kN}$ $M_6 = 0 \text{ kNm}$
M_{max}		$x = V/q = 32/8 = 4.0 \text{ m}$ $M_{max} = A_y \cdot 4 - A_x \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2$ $= 16,0 \text{ kNm}$

Maksimalni moment nalazi se na mjestu nultočke dijagrama poprečnih sila, pa moment izračunavamo u tom presjeku istovjetno izračunu momenta u presjeku broj 4.

3) Dijagrami unutarnjih sila



Kod crtanja dijagrama unutarnjih sila na okvirima moramo definirati način crtanja i stranu na kojoj ćemo prikazivati pozitivne, odnosno negativne vrijednosti. Za gredu će to biti isto kao i do sada, pa se na stupove moramo istovjetno nastaviti. Stoga ćemo pozitivne vrijednosti uzdužnih i poprečnih sila crtati s vanjske strane okvira, dok će kod momenta savijanja biti obrnuto.

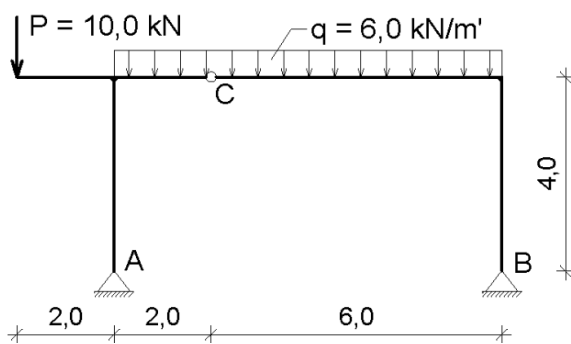
Uzdužna sila u prečki okvira jednaka je vrijednosti horizontalnih reakcija, te je negativnog predznaka jer horizontalne reakcije djeluju jedna prema drugoj (tlačna sila). U stupovima su također tlačne sile od vertikalnih reakcija koje djeluju prema gore.

Na dijagramu poprečnih sila možemo vidjeti kako se mijenja u skladu sa silama koje djeluju poprečno na elemente okvira. Kako bismo izračunali maksimalni moment, moramo odrediti mjesto nultočke dijagrama poprečnih sila.

Na momentnom dijagramu s crtkanim isječkom kružnice prenosimo vrijednost momenta sa stupa na gredu. Time je naglašeno kako je moment u tim točkama iste vrijednosti i s iste strane momentnog dijagrama.

Parabolu konstruiramo pomoću tangenata, pa ako je sve točno izračunato i nacrtano, u momentnom dijagramu nultočka mora biti na mjestu zgloba C. Dijagrame uvijek šrafiramo okomito na os elementa.

6.5.2. Okvirne konstrukcije – 2. primjer

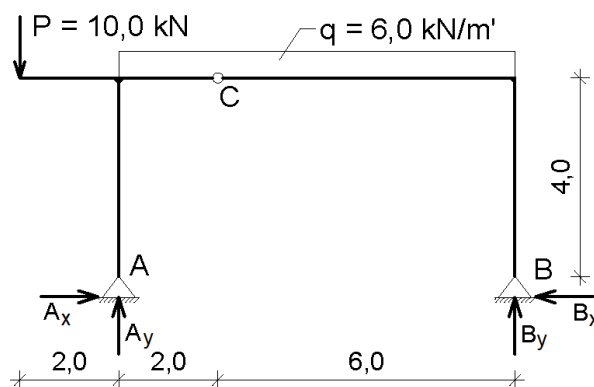


Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila za predmetni okvir.

1) Provjera statičke određenosti zadanog sustava

$$S = n \cdot 3 - z \cdot 2 - r = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 4 = 0 \quad \text{- statički određen sustav}$$

2) Određivanje reakcija



Pretpostavimo horizontalne i vertikalne reakcije troglobnog okvira, pa ih zatim izračunamo.

Za određivanje horizontalne komponente reakcije opet ćemo analizirati dio okvira desno od zgloba C. Kada odredimo horizontalnu reakciju B_x , drugu horizontalnu reakciju A_x dobivamo iz uvjeta ravnoteže horizontalnih sila.

$$\sum M_A = 0$$

$$B_y \cdot 8,0 - q \cdot 8,0 \cdot 4,0 + P \cdot 2,0 = 0$$

$$B_y = \frac{6,0 \cdot 8,0 \cdot 4,0 - 10 \cdot 2,0}{8,0} = 21,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$P \cdot 10,0 - A_y \cdot 8,0 + q \cdot 8,0 \cdot 4,0 = 0$$

$$A_y = \frac{10 \cdot 10,0 + 6,0 \cdot 8,0 \cdot 4,0}{8,0} = 36,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_C^d = 0$$

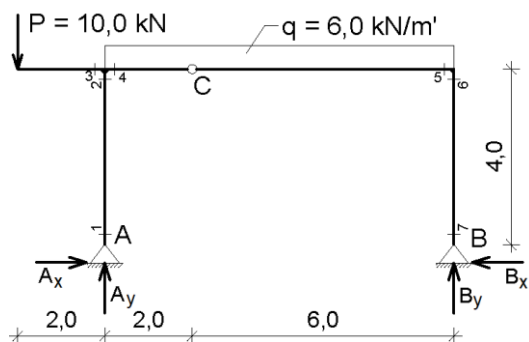
$$B_y \cdot 6,0 - B_x \cdot 4,0 - q \cdot 6,0 \cdot 3,0 = 0$$

$$B_x = \frac{21,5 \cdot 6,0 - 6,0 \cdot 6,0 \cdot 3,0}{4,0} = 5,25 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = B_x = 5,25 \text{ kN}$$

3) Određivanje unutarnjih sila

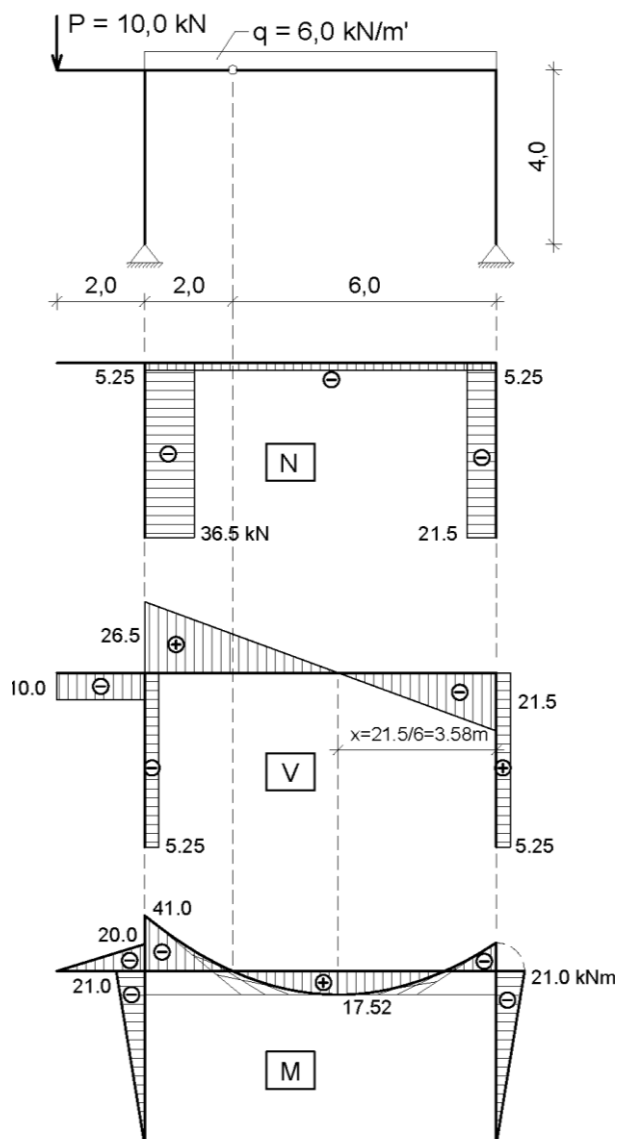


Presjeke definiramo na mjestima promjene opterećenja i promjene geometrije. Bitno je uočiti kako imamo čvor u kojem se sastaju tri elementa (stup i dvije grede) koji će imati potpuno različite unutarnje sile. Stoga moramo definirati presjeke 2, 3 i 4, kako je prikazano. U ovom koraku radimo kao da nema zgloba u točki C.

Presjek	Skica	Unutarnje sile
1		$N_1 = -A_y = -36,5 \text{ kN}$ $V_1 = -A_x = -5,25 \text{ kN}$ $M_1 = 0 \text{ kNm}$
2		$N_2 = -A_y = -36,5 \text{ kN}$ $V_2 = -A_x = -5,25 \text{ kN}$ $M_2 = -A_x \cdot 4,0 = -21,0 \text{ kNm}$
3		$N_3 = 0 \text{ kN}$ $V_3 = -P = -10,0 \text{ kN}$ $M_3 = -P \cdot 2,0 = -20,0 \text{ kNm}$
4		$N_4 = -A_x = -5,25 \text{ kN}$ $V_4 = A_y - P = 26,5 \text{ kN}$ $M_4 = -A_x \cdot 4 - P \cdot 2 = -41,0 \text{ kNm}$
5		$N_5 = -A_x = -5,25 \text{ kN}$ $V_5 = A_y - P - q \cdot 8 = -21,5 \text{ kN}$ $M_5 = A_y \cdot 8 - A_x \cdot 4 - P \cdot 10 - q \cdot 8 \cdot 4 = -21,0 \text{ kNm}$
6		$N_6 = -B_y = -21,5 \text{ kN}$ $V_6 = B_x = 5,25 \text{ kN}$ $M_6 = -B_x \cdot 4,0 = -21,0 \text{ kNm}$

Presjek	Skica	Unutarnje sile
7		$N_7 = -B_y = -21,5 \text{ kN}$ $V_7 = B_x = 5,25 \text{ kN}$ $M_7 = 0 \text{ kNm}$
M_{max}		$x = V/q = 21,5/6 = 3,58 \text{ m}$ $M_{max} = B_y \cdot 3,58 - B_x \cdot 4,0 - q \cdot \frac{3,58^2}{2} = 17,52 \text{ kNm}$

4) Dijagrami unutarnjih sila



Kao i u prethodnom zadatku pozitivne vrijednosti uzdužnih i poprečnih sila crtamo s vanjske strane okvira, dok kod momenta savijanja pozitivne vrijednosti crtamo unutar okvira.

Uzdužna sila u gredi, odnosno prečki okvira jednaka je vrijednosti horizontalnih reakcija, te je negativnog predznaka jer horizontalne reakcije djeluju jedna prema drugoj (tlačna sila). U stupovima su također tlačne sile od vertikalnih reakcija koje djeluju prema gore.

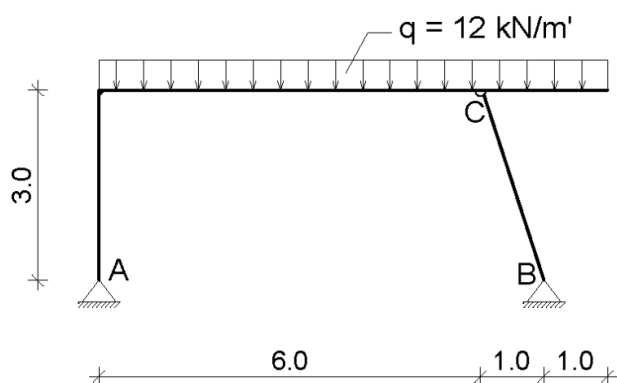
Na dijagramu poprečnih sila možemo vidjeti kako se mijenja u skladu sa silama koje djeluju poprečno na elemente okvira.

Kako bismo izračunali maksimalni moment, moramo odrediti mjesto nultočke dijagrama poprečnih sila.

Kako je ranije napomenuto, u čvoru u kojem se sastaju tri elementa imamo tri različite vrijednosti unutarnjih sila. No i ovdje postoje pravila kojima možemo provjeriti izračun. Naime, u tom čvoru imamo tri različite vrijednosti momenta, no zbroj vrijednosti na stupu i gredi prepusta mora se poklapati s vrijednosti momenta na prečki okvira.

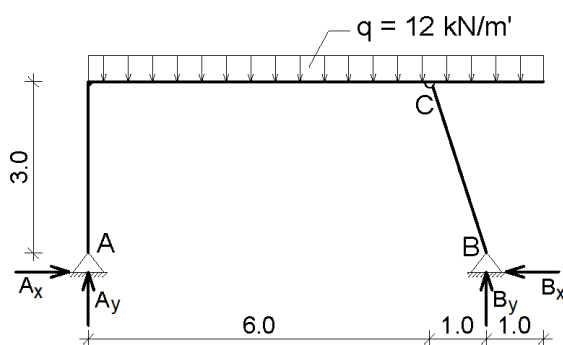
Naravno i ovdje vrijedi da u momentnom dijagramu nultočka mora pasti na mjestu zgloba C. Dijagrame šrafiramo okomito na os elementa.

6.5.3. Okvirne konstrukcije – 3. primjer



Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

1) Određivanje reakcija



Pretpostavimo horizontalne i vertikalne reakcije okvira, pa ih zatim izračunamo.

Prilikom analize dijela okvira, s ciljem određivanja horizontalnih reakcija, sustav moramo razdvojiti u poluzglobu C. Kako se radi o poluzglobu, ispravno je razdvojiti sustav na način kojim ne presijecamo gredu, već samo zglob, odnosno poluzglob. Stoga ako analiziramo desnu stranu od poluzgloba C, obuhvaćamo samo kosi stup BC, nikako ne i prepust grede desno od poluzgloba C.

$$\sum M_A = 0$$

$$B_y \cdot 7,0 - q \cdot 8,0 \cdot 4,0 = 0$$

$$B_y = \frac{12,0 \cdot 8,0 \cdot 4,0}{7,0} = 54,86 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$q \cdot 8,0 \cdot 3,0 - A_y \cdot 7,0 = 0$$

$$A_y = \frac{12,0 \cdot 8,0 \cdot 3,0}{7,0} = 41,14 \text{ kN}$$

$$\sum M_C^d = 0$$

$$B_y \cdot 1,0 - B_x \cdot 3,0 = 0$$

$$B_x = \frac{1}{3} B_y = 18,29 \text{ kN}$$

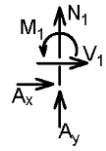
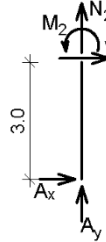
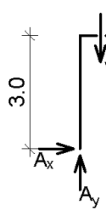
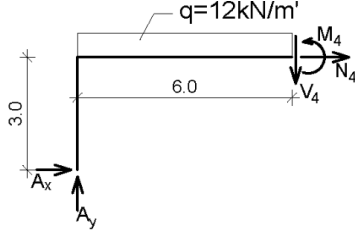
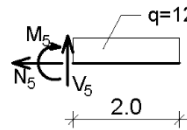
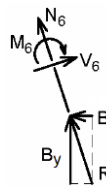
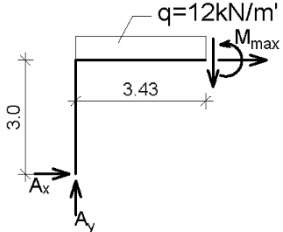
$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = B_x = 18,29 \text{ kN}$$

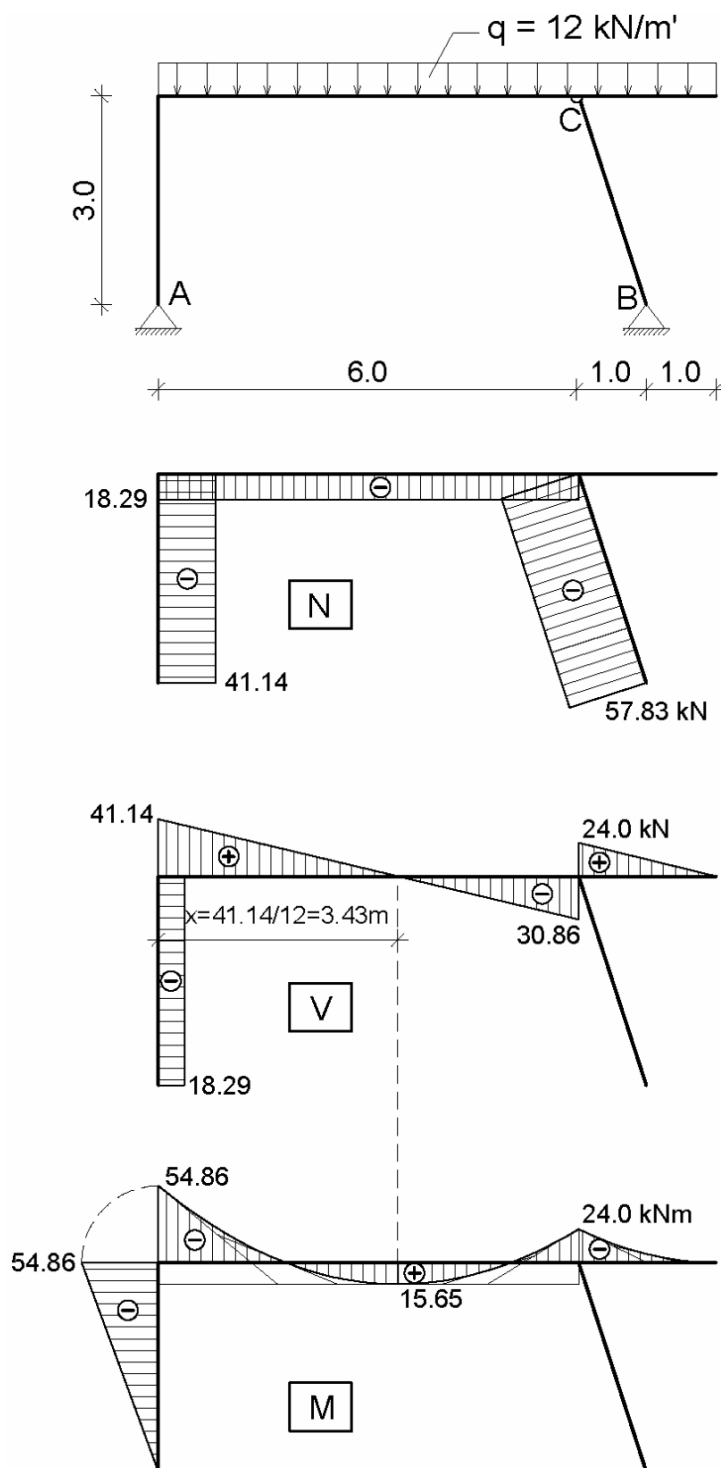
Isto smo mogli dobiti ako uočimo kako je kosi stup BC po definiciji štap, pa reakcija B mora ležati na pravcu štapa. Iz toga proizlazi kako je omjer $B_x/B_y = 1/3$.

2) Određivanje unutarnjih sila

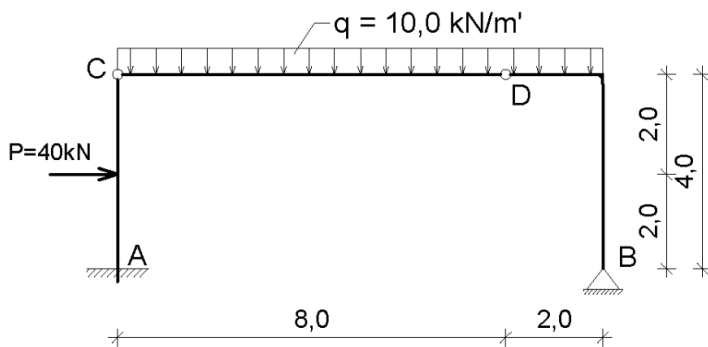
Presjeke definiramo na mjestima promjene opterećenja i promjene geometrije. Kako je element BC po definiciji štap, u njemu imamo samo uzdužnu silu i dovoljan je samo jedan presjek duž elementa. Vrijednost uzdužne sile najjednostavnije dobijemo primjenom Pitagorina poučka, s time da predznak uzdužne sile moramo odrediti ovisno o orijentaciji sile.

Presjek	Skica	Unutarnje sile
1		$N_1 = -A_y = -41,14 \text{ kN}$ $V_1 = -A_x = -18,29 \text{ kN}$ $M_1 = 0 \text{ kNm}$
2		$N_2 = -A_y = -41,14 \text{ kN}$ $V_2 = -A_x = -18,29 \text{ kN}$ $M_2 = -A_x \cdot 3,0 = -54,86 \text{ kNm}$
3		$N_3 = -A_x = -18,29 \text{ kN}$ $V_3 = A_y = 41,14 \text{ kN}$ $M_3 = -A_x \cdot 3,0 = -54,86 \text{ kNm}$
4		$N_4 = -A_x = -18,29 \text{ kN}$ $V_4 = A_y - q \cdot 6 = -30,86 \text{ kN}$ $M_4 = A_y \cdot 6 - A_x \cdot 3 - q \cdot 6 \cdot 3 = -24,0 \text{ kNm}$
5		$N_5 = 0 \text{ kN}$ $V_5 = q \cdot 2 = 24,0 \text{ kN}$ $M_5 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -24,0 \text{ kNm}$
6		$N_6 = -\sqrt{B_x^2 + B_y^2} = -57,83 \text{ kN}$ $V_6 = 0 \text{ kN}$ $M_6 = 0 \text{ kNm}$
M_{max}		$x = V/q = 41,14/12 = 3,43 \text{ m}$ $M_{max} = A_y \cdot 3,43 - A_x \cdot 3,0 - q \cdot \frac{3,43^2}{2} = 15,65 \text{ kNm}$

3) Dijagrami unutarnjih sila



6.5.4. Okvirne konstrukcije – 4. primjer

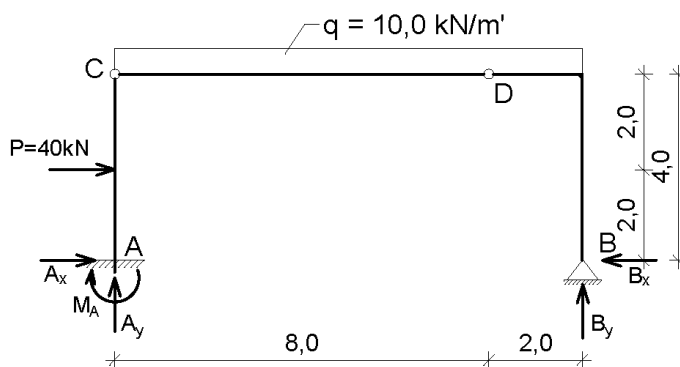


Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

1) Provjera statičke određenosti zadanog sustava

$$S = n \cdot 3 - z \cdot 2 - r = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0 \quad \text{- statički određen sustav}$$

2) Određivanje reakcija



Pretpostavimo horizontalne i vertikalne reakcije, te u upetom osloncu A moment upetosti M_A .

Ako postavimo sume momenata na točke oslonca A i B kako smo to do sada radili, u oba izraza će se kao nepoznanica pojaviti moment upetosti, pa tako nećemo uspješno odrediti reakcije.

Ispravan i najjednostavniji način za rješavanje ovog tipa zadatka je odmah na početku postaviti sume momenata na unutarnje zglobove C i D, pri čemu u oba slučaja moramo analizirati istu stranu koja ne uključuje upeti oslonac. Tako ćemo dobiti sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama. Stoga postavimo izraze za sumu momenata na zglobove C i D, pritom analizirajući desnu stranu.

$$\sum M_C^d = 0$$

$$B_y \cdot 10,0 - B_x \cdot 4,0 - q \cdot 10,0 \cdot 5,0 = 0$$

$$\sum M_D^d = 0$$

$$B_y \cdot 2,0 - B_x \cdot 4,0 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 = 0$$

Kako je $-B_x \cdot 4,0$ zajednički faktor u oba izraza, izdvojimo ga iz izraza i izjednačimo preostalo.

$$B_y \cdot 10,0 - q \cdot 10,0 \cdot 5,0 = B_y \cdot 2,0 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0$$

$$B_y \cdot (10,0 - 2,0) = q \cdot 10,0 \cdot 5,0 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0$$

$$B_y = \frac{q \cdot 10 \cdot 5 - q \cdot 2 \cdot 1}{10 - 2} = \frac{10 \cdot (10 \cdot 5 - 2 \cdot 1)}{10 - 2} = 60,0 \text{ kN}$$

Kada smo odredili B_y , uvrstimo ga u jedan od prethodnih izraza kako bismo izračunali B_x .

$$B_y \cdot 10,0 - B_x \cdot 4,0 - q \cdot 10,0 \cdot 5,0 = 0$$

$$B_x = \frac{60 \cdot 10 - 10 \cdot 10 \cdot 5}{4} = 25,0 \text{ kN}$$

Zatim odredimo preostale reakcije A_x i A_y pomoću uvjeta ravnoteže horizontalnih i vertikalnih sila na cijelom sustavu.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$A_x + P - B_x = 0$$

$$A_x = B_x - P = -15,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$A_y + B_y - q \cdot 10,0 = 0$$

$$A_y = 10,0 \cdot 10,0 - B_y = 40,0 \text{ kN}$$

Na kraju odredimo moment upetosti M_A tako da postavimo sumu momenata na jedan od oslonaca, u ovom slučaju na oslonac A.

$$\Sigma M_A = 0$$

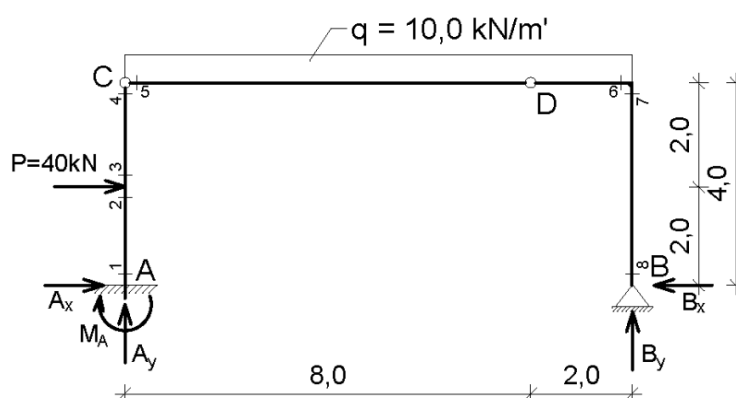
$$B_y \cdot 10,0 - q \cdot 10,0 \cdot 5,0 - P \cdot 2,0 - M_A = 0$$

$$M_A = 60 \cdot 10 - 10 \cdot 10 \cdot 5 - 40 \cdot 2 = 20 \text{ kNm}$$

2) Određivanje unutarnjih sila

Presjeke definiramo na mjestima promjene opterećenja i promjene geometrije.

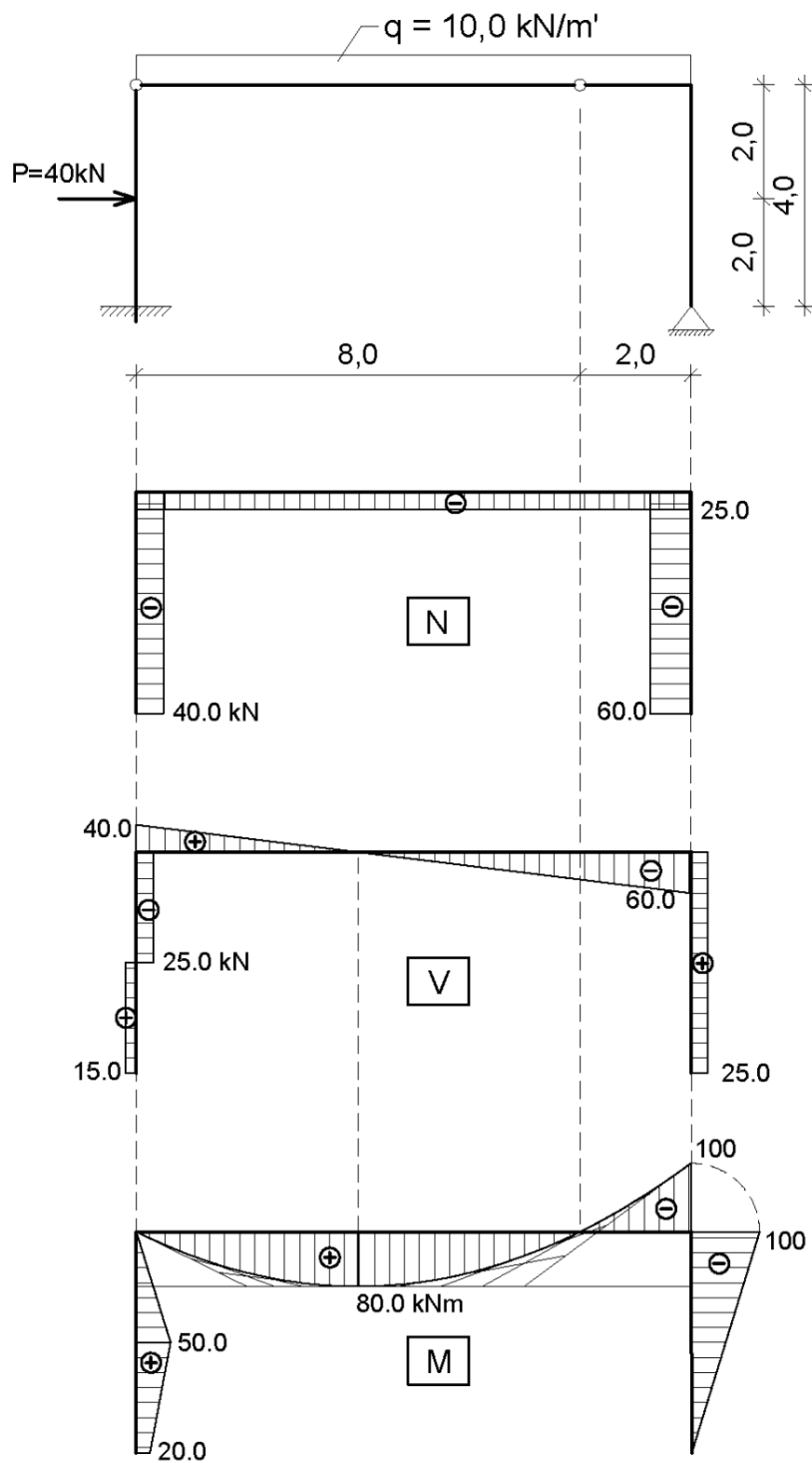
U nastavku su izračunate unutarnje sile u samo nužno potrebnim presjecima, preostalo se može utvrditi primjenom pravila za određivanje dijagrama unutarnjih sila.



Presjek	Skica	Unutarnje sile
1		$N_1 = -A_y = -40,0 \text{ kN}$ $V_1 = -A_x = 15,0 \text{ kN}$ $M_1 = M_A = 20,0 \text{ kNm}$

Presjek	Skica	Unutarnje sile
3		$N_3 = -A_y = -40,0 \text{ kN}$ $V_3 = -A_x - P = -25,0 \text{ kN}$ $M_3 = M_A - A_x \cdot 2,0 = 50,0 \text{ kNm}$
5		$N_5 = -A_x - P = -25,0 \text{ kN}$ $V_5 = A_y = 40,0 \text{ kN}$ $M_5 = M_A - A_x \cdot 4 - P \cdot 2 = 0 \text{ kNm}$
6		$N_6 = -B_x = -25,0 \text{ kN}$ $V_6 = -B_y = -60,0 \text{ kN}$ $M_6 = -B_x \cdot 4,0 = -100,0 \text{ kNm}$
7		$N_7 = -B_y = -60,0 \text{ kN}$ $V_7 = B_x = 25,0 \text{ kN}$ $M_7 = -B_x \cdot 4,0 = -100,0 \text{ kNm}$
M_{max}		$x = V/q = 60/10 = 6,0 \text{ m}$ $M_{max} = B_y \cdot 6,0 - B_x \cdot 4,0 - q \cdot \frac{6,0^2}{2} = 80,0 \text{ kNm}$

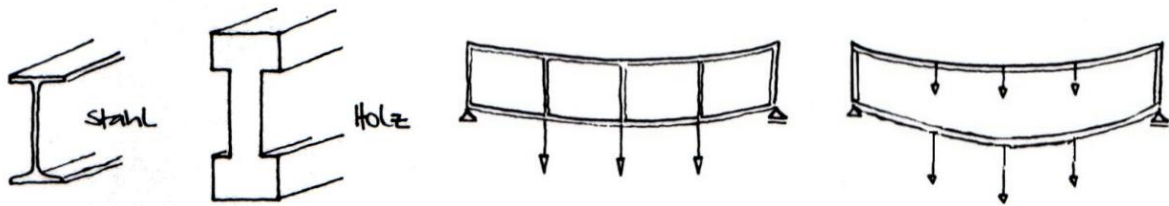
4) Dijagrami unutarnjih sila



6.6. Rešetkaste konstrukcije

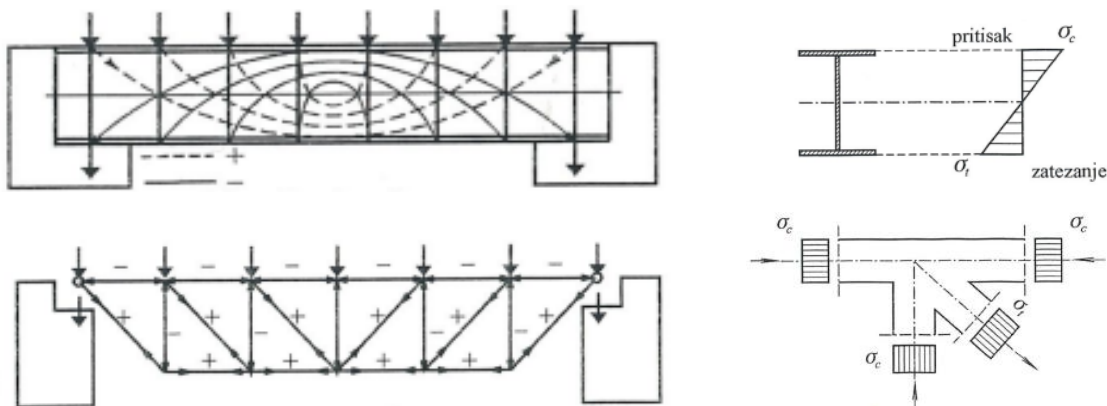
Razvoj čeličnih i armiranobetonskih konstrukcija omogućio je realizaciju konstrukcija sve većih raspona. Kod grednih i okvirnih nosača, nosivost je najčešće ograničena **krutosti na savijanje**. Najefikasniji način povećanja nosivosti grede je povećanje **visine poprečnog presjeka** jer se time povećava krak unutarnjeg momenta koji se opire savijanju. Time se povećava i **otpornost presjeka**.

Međutim, povećanje visine (dimenzija) grede vodi i do povećanja **vlastite težine**, što smanjuje ukupnu učinkovitost. Rješenje se nalazi u **racionalnom oblikovanju presjeka**, primjerice korištenjem *I-presjeka* (slika 6.25.), kod kojeg je većina materijala smještena u gornjoj i donjoj zoni – gdje su naprezanja najveća – dok je sredina presjeka (hrbat) tanja. Na taj način može se postići povećanje visine, time i nosivosti, bez značajnijeg povećanja težine.



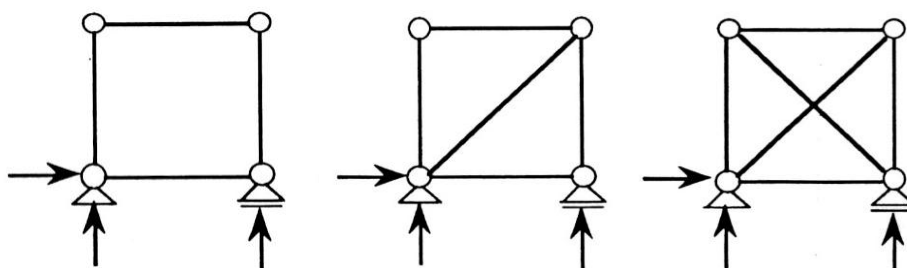
Slika 6.25. *I – presjeci kao racionalno oblikovanje poprečnih presjeka u cilju povećanja visine i smanjenja vlastite težine*

Ovaj princip materijalne učinkovitosti doslovno se prenosi na **rešetkaste gredne nosače**, koji se intenzivno razvijaju od druge polovice 19. stoljeća. Presjek rešetkastog nosača čine **dva pojasa** – gornji i donji koji su međusobno povezani vertikalnim i kosim elementima na određenom razmaku.



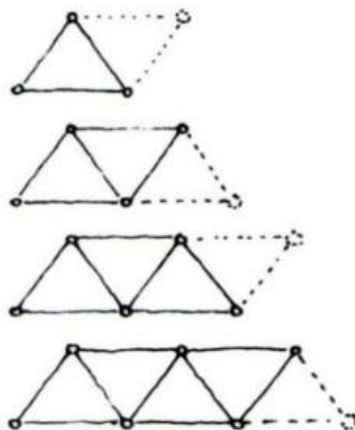
Slika 6.26. *Optimizacija u cilju povećanja visine i smanjenja težine nosača – puni → rešetkasti nosač*

Ako su veze između elemenata zglobne, kvadratna forma (samo s vertikalnim elementima) među pojasevima nije stabilna – stoga se u rešetke umeću **dijagonale**, kako bi se svi elementi pretvorili u **trokute**.



Slika 6.27. *Formiranja stabilne strukture od štapova spojenih zglobno dodavanjem dijagonala*

Trokut je **geometrijski nepromjenjiv** oblik, čak i kada su spojevi zglobovi, zbog čega je osnovni građevni element rešetkastog sustava. Rešetkasti nosači nastaju **nizanjem trokuta**.



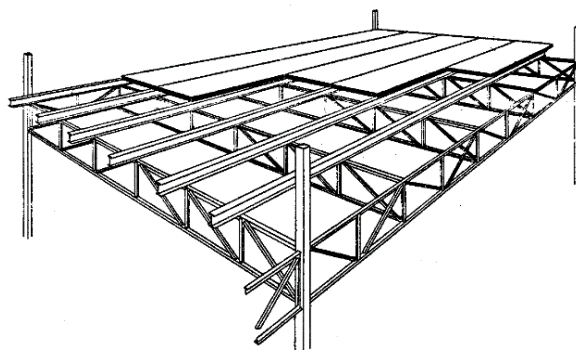
Slika 6.28. *Primjer nizanja stabilnih trokutastih struktura u cilju dobivanja rešetkastih nosača*

Rešetkasti gredni nosači rezultat su želje da se dobiju nosači s minimalnim utroškom materijala. Bitno su povoljniji od punih i saćastih nosača. Generalno, rešetkasti nosači sastoje se od međusobno povezanih pojasnih štapova i štapova ispune (dijagonale i vertikale) koji formiraju trokutastu strukturu.

Štapovi i unutarnje sile

Štapnim elementom, ili kraće **štapom**, nazivamo ravni konstruktivni element koji je s podlogom ili s drugim dijelovima konstrukcije **povezan zglobovima** na svoja dva kraja, pri čemu i sve vanjske sile na štapu djeluju isključivo na njegovim krajevima. Iz tog se razloga **ravnoteža štapa** svodi na ravnotežu **dviju rezultantnih sila na njegovim krajevima**. One će biti u ravnoteži samo ako su jednake, suprotne i na istom pravcu. „Isti pravac” je dakako os štapa (spojnica dvaju krajeva štapa) pa će u svakom presjeku štapa postojati samo sila duž njegove osi, odnosno isključivo uzdužna sila. Poprečna sila i moment bit će jednaki nuli.

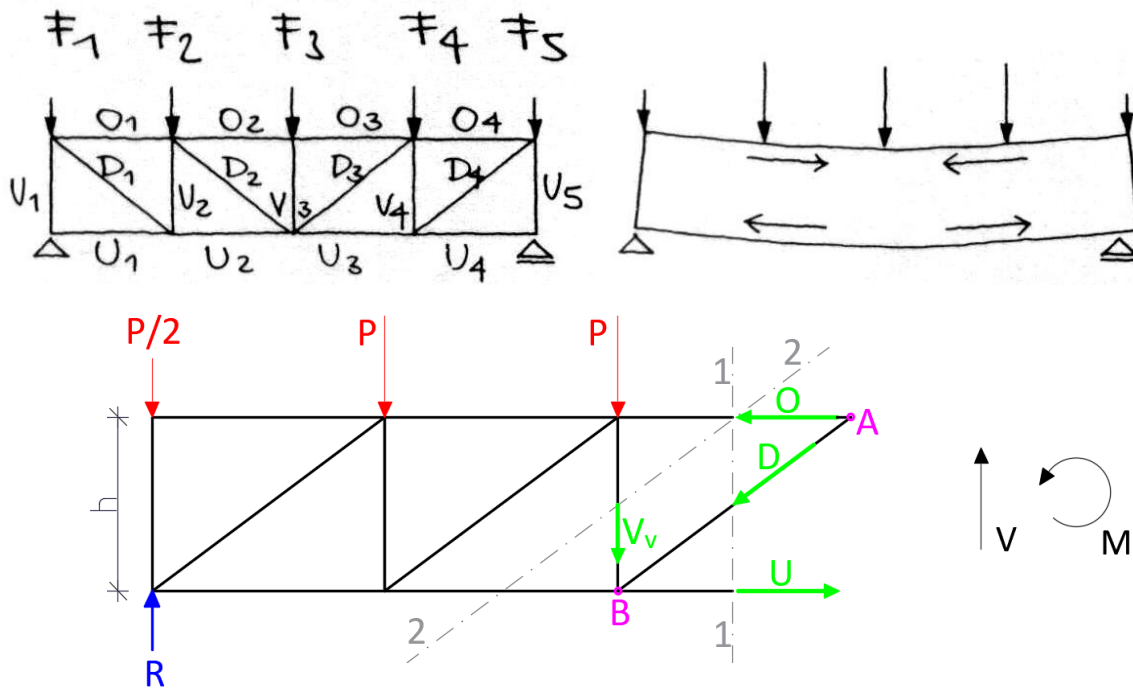
Rešetkasti nosač najčešće je drugačije oblikovan gredni nosač. Ako postignemo (projektantskim rješenjem) da zgloбно povezanim elementima rešetkastog nosača vanjsko opterećenje u vidu sila djeluje isključivo u zglobovima, osigurat ćemo uvjete da su elementi rešetke štapovi: zgloбно su pričvršćeni, a opterećenje djeluje isključivo na krajevima. U tom će slučaju u svim elementima rešetke postojati samo uzdužne sile. Time je cijeli sustav racionaliziran i lako ga je proračunati.



Slika 6.29. *Primjer stropne konstrukcije izveden od rešetkastih nosača*

U slučaju najčešćeg, vertikalnog opterećenja obična se greda deformira tako da je u gornjoj zoni presjeka tlak, u donjoj vlak. Analogno će u rešetkastoj gredi u štapovima gornjeg pojasa djelovati tlačne, a u štapovima donjeg pojasa vlačne sile, analogno ponašanju obične grede. Štapovi dvaju pojasa trebaju, po principu sprega, osigurati nosivost na moment savijanja dok će štapovi ispune (dijagonale i vertikale) osigurati nosivost na poprečne sile.

Dakle, kod vertikalnog opterećenja, gornji pojas rešetkastog nosača nalazi se u **tlaku**, a donji pojas je **vlačni**. Pojasevi zajedno preuzimaju **moment savijanja**, dok **vertikale i dijagonale** prenose **poprečne sile** (slika 6.30.).



Slika 6.30. Izgled rešetkastog nosača opterećenog u čvorovima i logika preuzimanja unutarnjih sila (momenta savijanja i poprečne sile)



Slika 6.31. Roštiljna konstrukcija od rešetkastih nosača

Rešetkasti nosači mogu tvoriti **ravninske** ili **prostorne roštiljne** – sustave s gredama u dva smjera (najčešće međusobno okomita). Najefikasniji su kod **kvadratnih tlocrta**, gdje svaki smjer prenosi polovicu ukupnog opterećenja. Prihvatljivo ga je izvoditi i nad tlocrtima kod kojih omjer duže i kraće stranice nije veći od dva. Roštilji se najčešće izvode **krutim vezama u čvorovima**, a mogu i prostornim zglobnim vezama.

Zbog mogućnosti oblikovanja bilo kakve forme **nizanjem trokuta**, rešetkasti sustavi pogodni su i za **zakrivljene, prostorne** pa čak i **skulpturalne** konstrukcije. Zbog toga je rešetkasti konstruktivni sustav vrlo često izabrani sustav brojnih arhitektonskih realizacija od sredine prošlog stoljeća.



Slika 6.32. *Suvremena arhitektonska realizacija s rešetkastim nosačima*



Slika 6.33. *Prostorna zakrivljena rešetkasta konstrukcija*



Slika 6.36. Zračna luka u Zagrebu – primjer prostorne MERO rešetke

Statička određenost rešetke

Rešetkasti nosači također mogu biti statički određeni i neodređeni. Broj štapova (**s**) i čvorova (**n**) u ravninskoj rešetki povezani su izrazom:

$$s = 2n - 3. \quad (6.7.)$$

- Ako je razlika **pozitivna**, sustav je **nestabilan**.
- Ako je jednaka nuli – rešetka je **statički određena**.
- Ako je negativna – rešetka je **statički neodređena**.

Uvijek treba paziti jer se ne smije dogoditi da je „s“ pozitivan jer bi tada sustav bio nestabilan.

Postupci proračuna - određivanja unutarnjih sila u rešetki

Određivanje unutarnjih sila (sila u štapovima rešetke) provodimo **metodom presjeka**, kao i u slučaju ostalih konstruktivnih sustava. Razlika je u tome što zamišljenim presijecanjem nosača ne određujemo uzdužnu i poprečnu silu te moment savijanja, već isključivo uzdužne sile u presječenim štapovima. Uobičajeni postupak naziva se **Ritterova metoda**: sile se određuju iz triju momentnih jednadžbi ravnoteže na tri presjecišta traženih sila (**Ritterove točke**). Sile je moguće odrediti i **Culmannovim (grafičkim) postupkom** primjenom pravila za ravnotežu četiriju sila na poznatim pravcima djelovanja, pri čemu je jednoj sili poznata i veličina. Želimo li odrediti sile u svim štapovima rešetke, koristimo se tzv. **metodom čvorova**. Postavimo **uvjete ravnoteže centralnog sustava sila (grafičke ili analitičke)** za prvi čvor u kojem imamo barem jednu poznatu i najviše dvije nepoznate sile. Nakon što odredimo sile u odabranom čvoru, nastavljamo sa susjednim povezanim čvorom koji ispunjava gornje uvjete (barem jedna poznata sila, ne više od dvije nepoznate), koristeći se dobivenim vrijednostima sila iz prethodnog čvora. **Cremonin plan sila** grafička je verzija metode čvorova kod koje se poligoni sila crtaju na jedinstvenom poligonu pa je svaka sila prikazana samo jednom.

Opis pojedinih postupaka proračuna

- a) **Metoda presjeka (Ritterova metoda)** analitički je postupak koji se temelji na primjeni jednadžbi ravnoteže za presječen dio nosača. Koriste se **tri momentne jednadžbe** kroz tzv. *Ritterove točke*.

Postupak:

1. Izvrši **zamišljeni presjek** kroz najviše **tri štapa** u kojima želiš odrediti sile.
2. Odvoji jednu stranu konstrukcije (lijevu ili desnu) i postavi **tri jednadžbe ravnoteže**:
 - $\sum F_x = 0$
 - $\sum F_y = 0$
 - $\sum M = 0$ (moment oko točke kroz koju prolaze dvije od triju presječenih sila, da se eliminiraju)
3. Rješavanjem tih jednadžbi dobivaju se vrijednosti traženih sila.

Prednost: brzo i efikasno za **odabrane štapove**.

Ograničenje: ne koristi se za određivanje sila u cijeloj rešetki.

- b) **Metoda čvorova** analitički je, ali i grafički postupak kojim se služimo kad želimo odrediti sile u svim štapovima. Rješava se **čvor po čvor**, pri čemu svaki mora imati najviše dvije nepoznate sile.

Postupak:

1. Počni od **čvora** u kojem su **najviše dvije nepoznate sile** (idealno uz jednu poznatu).
2. Na temelju **ravnoteže sila u x i y smjeru** ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$) izračunaj nepoznate sile ili, ako se rješava grafički, svaki čvor grafički uravnoteži zatvaranjem poligona sila.
3. Prijedi na **sljedeći susjedni čvor** u kojem su sada najviše dvije nepoznate sile.
4. Nastavi postupak dok se ne odrede sve sile u svim štapovima.

Prednost: omogućuje **kompletan proračun** cijelog nosača.

Ograničenje: može biti dugotrajan za veće rešetke.

- c) **Grafički postupak (Culmannov)** grafički je postupak koji se koristi pravilom ravnoteže **četiriju sila** na poznatim pravcima. Prikladan je za ručno određivanje.

Postupak:

1. Nacrta se **konstrukcija u razmjeru** i označe svi štapovi i čvorovi.
2. Zna se veličina barem jedne sile (npr. vanjsko opterećenje).
3. Koristeći se pravilom o **ravnoteži četiriju sila**, na poznatim pravcima crtaju se poligoni sila za čvorove.
4. Iz duljina vektora u poligonu sila određuju se veličine unutarnjih sila.

Prednost: brz pregled odnosa među silama, pogodno za **rano oblikovanje**.

Ograničenje: niska točnost, posebno kod manjih ili vrlo opterećenih rešetki.

- d) **Cremonin plan sila** grafička je verzija metode čvorova. Radi se o grafičkom postupku koji se koristi **jedinstvenim poligonom sila** (tzv. Cremonin plan) za cijelu rešetku. Svaka sila u štapu prikazuje se **samo jednom**.

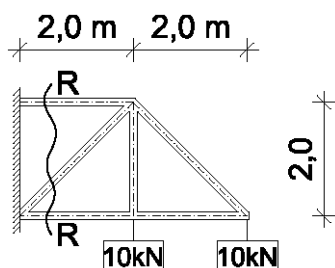
Postupak:

1. Označi svaki štap rešetke **po abecedi**.
2. U konstrukciji označi čvorove i definiraj pravce djelovanja svih sila.
3. Za svaki čvor crta se **poligon sila**, koji se spaja s poligonima susjednih čvorova tako da se svaka sila prikazuje istom dužinom i smjerom.
4. Duljine vektora u planu proporcionalne su stvarnim silama u štapovima.

Prednost: vizualno pregledno, prikazuje odnose sila u cijeloj konstrukciji.

Ograničenje: zahtijeva precizan crtež i dobru orijentaciju u prostoru.

Prethodno opisani postupci (metode) detaljno će se pojasniti na sljedećim primjerima jer je pomoću primjera najjednostavnije shvatiti primjenu određenog postupka.

6.6.1. Rešetkaste konstrukcije – 1. primjer

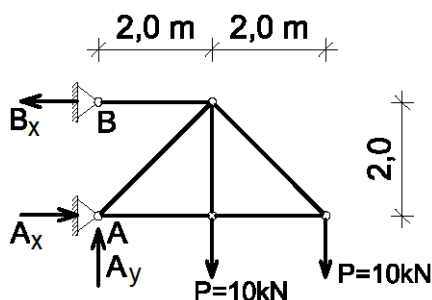
Zadan je konzolni rešetkasti nosač.

Treba provjeriti statičku određenost zadanog nosača i Ritterovom metodom odrediti sile u štapovima označenima presjekom R-R.

1) Provjera statičke određenosti i određivanje reakcija

Prikažimo zadani sustav pojednostavljeno statičkom shemom i provjerimo statičku određenost zadanog sustava:

$$s = 2k - 3 \rightarrow 5 = 2 \cdot 4 - 3$$



Kako je štap koji se priključuje na oslonac B izdvojen iz rešetke, on se ne računa u broj štapova rešetke s . Stoga za broj štapova uvrštavamo 5, što je jednako razlici $2 \cdot 4 - 3$ i zaključujemo kako je zadani sustav statički određen.

Pretpostavimo reakcije u osloncima A i B te ih zatim izračunamo. Kako je ranije spomenuto, štap koji se priključuje na oslonac B izdvojen je iz rešetke, pa se pravac reakcije poklapa s pravcem štapa, iz čega proizlazi kako je reakcija u osloncu B horizontalna.

$$\sum M_A = 0$$

$$B_x \cdot 2,0 - P \cdot 2,0 - P \cdot 4,0 = 0$$

$$B_x = \frac{10 \cdot 2 + 10 \cdot 4}{2} = 30,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$A_x \cdot 2,0 - P \cdot 2,0 - P \cdot 4,0 = 0$$

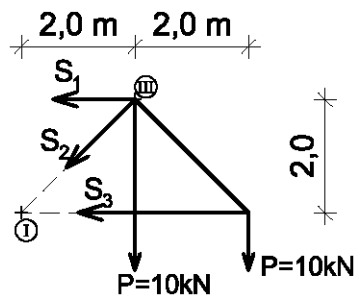
$$A_x = \frac{10 \cdot 2 + 10 \cdot 4}{2} = 30,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 2 \cdot P = 0$$

$$A_y = 2 \cdot 10 = 20,0 \text{ kN}$$

2) Određivanje sila u štapovima



Na mjestu zadanog presjeka *R-R* zamišljenim presjekom razdvojimo rešetkasti nosač na dva dijela i dalje rješavamo samo desni dio. Štapove koje smo presjekli zamjenjujemo silama S_1 , S_2 i S_3 . Kako bismo izračunali navedene sile u štapovima, najprije moramo definirati Ritterove točke I i III gdje se sijeku pravci presječenih štapova. Zatim postavimo sumu momenata na pojedinu točku i odredimo traženu silu u štapu.

$$\Sigma M_I = 0$$

$$S_1 \cdot 2,0 - P \cdot 2,0 - P \cdot 4,0 = 0$$

$$S_1 = \frac{10 \cdot 2 + 10 \cdot 4}{2} = 30,0 \text{ kN (vlak)}$$

$$\Sigma M_{III} = 0$$

$$S_3 \cdot 2,0 + P \cdot 2,0 = 0$$

$$S_3 = \frac{-10 \cdot 2}{2} = -10,0 \text{ kN (tlak)}$$

Kako su sile S_1 i S_3 paralelne, Ritterova točka II nalazi se u beskonačnosti, pa ćemo za izračun sile S_2 postaviti izraz za ravnotežu vertikalnih sila.

$$\Sigma F_y = 0$$

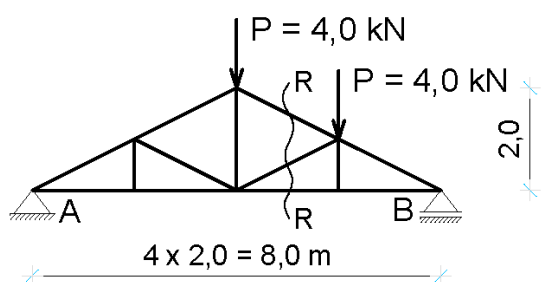
$$S_{2y} + 2 \cdot P = 0$$

$$S_{2y} = -2 \cdot 10 = -20,0 \text{ kN}$$

Kako je vertikalna komponenta sile S_2 jednaka $S_{2y} = S_2 \cdot \sin 45^\circ$, vrijednost sile S_2 iznosi:

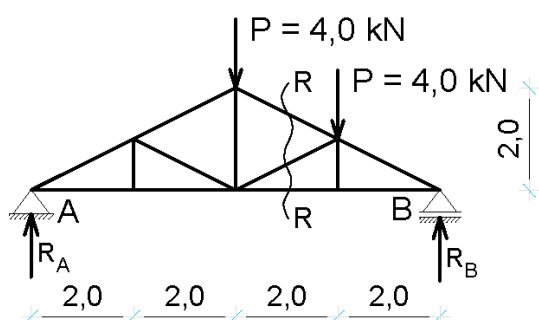
$$S_2 = \frac{S_{2y}}{\sin 45^\circ} = \frac{-20,0}{0,707} = -28,28 \text{ kN (tlak)}$$

6.6.2. Rešetkaste konstrukcije – 2. primjer



Ritterovom metodom treba odrediti sile u štapovima označenim presjekom R-R.

1) Određivanje reakcija



Najprije pretpostavimo i odredimo reakcije. Oslonac B horizontalno je pomičan (klizni) ležaj, stoga u njemu može nastati samo vertikalna reakcija. Kako su obje sile P vertikalne, reakcija A također mora biti vertikalna.

Kada smo odredili reakcije, preporučljivo je napraviti kontrolu preko sume vertikalnih sila.

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot 8,0 - P \cdot 4,0 - P \cdot 6,0 = 0$$

$$R_B = \frac{4 \cdot 4 + 4 \cdot 6}{8} = 5,0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

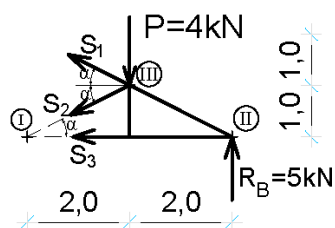
$$P \cdot 4,0 + P \cdot 2,0 - R_A \cdot 8,0 = 0$$

$$R_A = \frac{4 \cdot 4 + 4 \cdot 2}{8} = 3,0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ (kontrola)}$$

$$R_A + R_B - 2 \cdot P = 0$$

2) Određivanje sila u štapovima

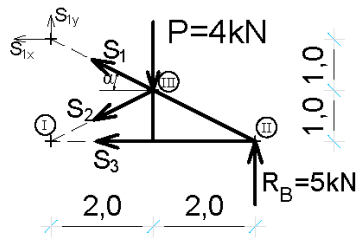


Na mjestu zadanog presjeka R-R zamišljenim presjekom razdvojimo rešetkasti nosač na dva dijela i dalje rješavamo samo desni dio. Štapove koje smo presjekli zamjenjujemo silama S_1 , S_2 i S_3 te odredimo Ritterove točke I, II i III.

Prije daljnjeg izračuna moramo još odrediti kut α koji sila S_1 zatvara s horizontalom. Taj kut identičan je kutu sile S_2 .

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26^\circ 33'$$

Najprije izračunavamo silu S_1 pomoću Ritterove točke I, gdje se sijeku sile S_2 i S_3 .



Kose sile uvijek rastavljamo na x i y komponente. Kako je sila po definiciji klizni vektor, njezin je učinak identičan bez obzira na to gdje je rastavljamo na komponente. Iz toga proizlazi kako je optimalno silu rastaviti na komponente na mjestu gdje će jedna od komponentata prolaziti kroz točku na koju računamo moment. To nam olakšava izračun jer ta komponenta ne daje moment, pa je izračun lakši i brži, a i manja je vjerojatnost pogreške u radu.

$$\sum M_I = 0$$

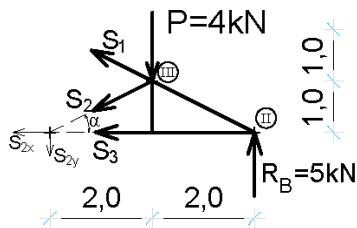
$$S_{1x} \cdot 2,0 - P \cdot 2,0 + R_B \cdot 4,0 = 0$$

$$S_{1x} = \frac{4 \cdot 2 - 5 \cdot 4}{2} = -6,0 \text{ kN}$$

Kako je horizontalna komponenta sile S_1 jednaka $S_{1x} = S_1 \cdot \cos 26^\circ 33'$, vrijednost sile S_1 iznosi:

$$S_1 = \frac{S_{1x}}{\cos 26^\circ 33'} = \frac{-6,0}{0,89} = -6,71 \text{ kN (tlak)}$$

Dalje izračunavamo silu S_2 pomoću Ritterove točke II, gdje se sijeku sile S_1 i S_3 .



Ponovo je tražena sila rastavljena na komponente u točki gdje jedna od komponentata prolazi kroz točku na koju računamo moment.

$$\sum M_{II} = 0$$

$$S_{2y} \cdot 4,0 + P \cdot 2,0 = 0$$

$$S_{2y} = \frac{-4 \cdot 2}{4} = -2,0 \text{ kN}$$

Kako je vertikalna komponenta sile S_2 jednaka $S_{2y} = S_2 \cdot \sin 26^\circ 33'$, vrijednost sile S_2 iznosi:

$$S_2 = \frac{S_{2y}}{\sin 26^\circ 33'} = \frac{-2,0}{0,45} = -4,47 \text{ kN (tlak)}$$

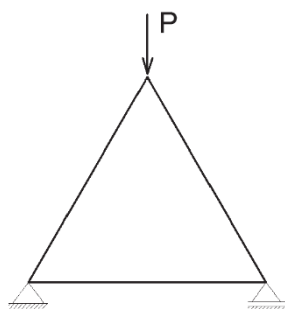
Preostala sila S_3 horizontalna je, a njezinu vrijednost dobivamo preko Ritterove točke III, gdje se sijeku sile S_1 i S_2 .

$$\sum M_{III} = 0$$

$$R_B \cdot 2,0 - S_3 \cdot 1,0 = 0$$

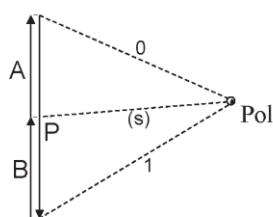
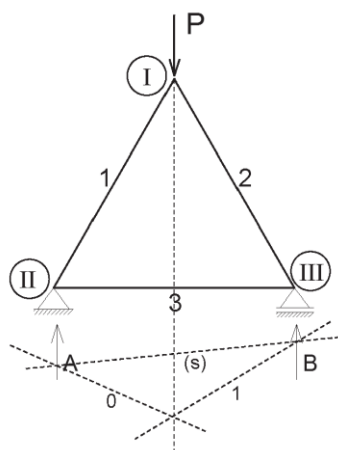
$$S_3 = 5 \cdot 2 = 10,0 \text{ kN (vlak)}$$

6.6.3. Rešetkaste konstrukcije – 3. primjer



Na zadanom jednakostraničnom trokutu opterećenom silom P treba odrediti sile u štapovima grafičkim postupkom.

1) Određivanje reakcija

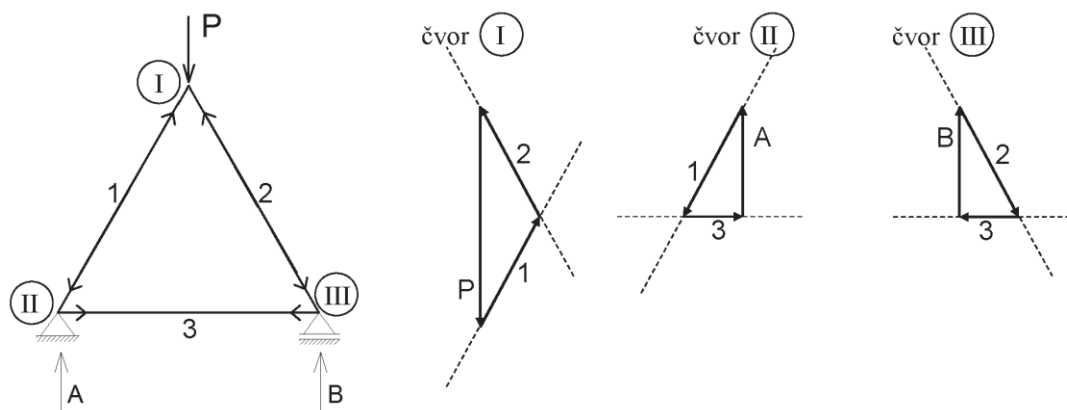


Iako nije nužno za rješavanje zadatka, najprije pretpostavimo i odredimo reakcije.

Kako su sve sile vertikalne, za određivanje reakcija koristimo se verižnim poligonom.

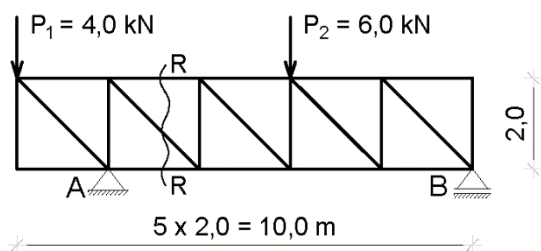
Za daljnje rješavanje zadatka numeriramo štapove i čvorove rešetke.

2) Određivanje sile u štapovima grafičkom metodom čvorova



Kako smo ranije odredili reakcije, u svakom od čvorova nam je poznata jedna sila, a nepoznate dvije sile. Stoga možemo krenuti od bilo kojeg čvora. Krećemo od čvora I, u kojem uravnotežimo silu P sa silama u štapovima 1 i 2 te prenesemo orijentaciju sila na plan sila. Zatim prelazimo na čvor II. Kako smo prethodno utvrdili da je sila u štapu 1 orijentirana prema čvoru I, a sila mora biti konstantna duž štapa, sila u štapu 1 mora također biti orijentirana prema čvoru II. Stoga kod rješavanja čvora II krećemo od poznate sile u štapu 1, koja je orijentirana suprotno od orijentacije te sile kod rješavanja čvora I. Uravnotežimo silu u štapu 1, reakciju A i silu u štapu 3. Nakon toga ponovimo korak za čvor broj III, pri čemu moramo okrenuti orijentacije sile u štapovima 2 i 3. Na kraju pomoću mjerila očitamo vrijednosti sila, a orijentacija na planu sila govori nam kako su sile u štapovima 1 i 2 tlačne (-), dok je sila u štapu 3 vlačna (+).

6.6.4. Rešetkaste konstrukcije – 4. primjer

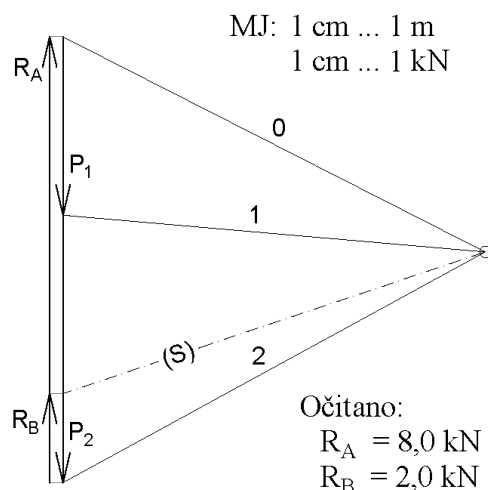
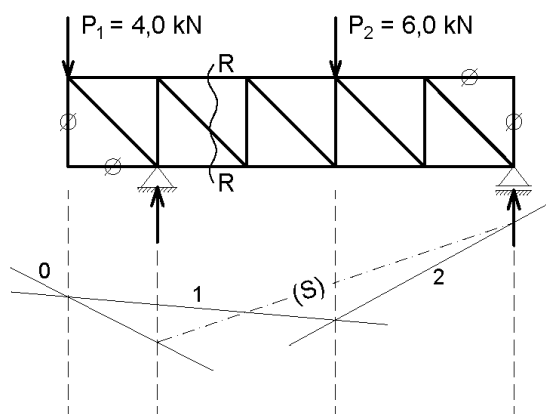


Grafičkim postupkom presjeka treba odrediti sile u štapovima označenim presjekom R-R, a zatim označiti štapove u kojima je sila jednaka nuli.

1) Određivanje reakcija

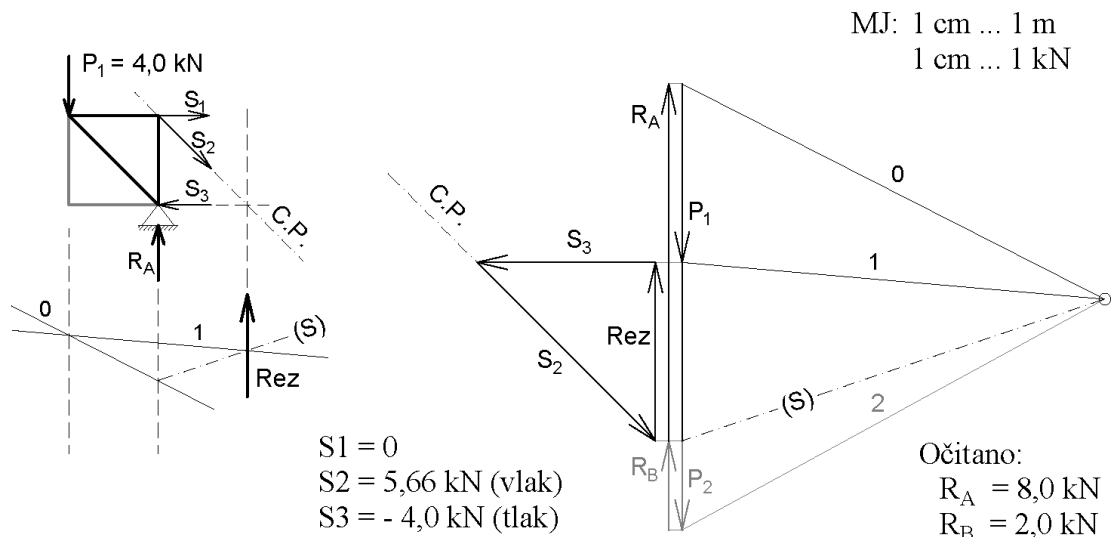
Kako bismo odredili reakcije, najprije moramo definirati mjerilo i nacrtati plan sila. Zadane sile P_1 i P_2 vertikalne su, reakcija R_B također je vertikalna jer je na mjestu horizontalno pomičnog oslonca, pa i reakcija R_A mora biti vertikalna. Stoga se za određivanje reakcija služimo verižnim poligonom. Produžimo pravce sila P_1 i P_2 na poligonu sila te ih u definiranom mjerilu nacrtamo u poligonu sila. Definiramo pol verižnog poligona i nacrtamo zrake te ih prenesemo na plan sila. Pri tome uočimo da sila P_1 zatvara trokut sa zrakama 0 i 1, pa se pravci sile P_1 i zraka 0 i 1 moraju sjeći u istoj točki. Isto vrijedi za silu P_2 i zrake 1 i 2. Zaključna zraka (S) spaja točke sjecišta početne zrake 0 s pravcem reakcije R_A i sjecišta završne zrake 2 s pravcem reakcije R_B . Prikažimo dobivene reakcije na poligonu sila te pomoću mjerila očitajmo dobivene vrijednosti.

Vezano za štapove u kojima je sila jednaka nuli, uočimo čvorove u kojima se spajaju dva štapa koji nisu paralelni. Ako pokušamo riješiti ravnotežu takvog čvora, možemo zaključiti kako je ravnoteža ispunjena jedino u slučaju kada su sile jednake nuli. Stoga zaključujemo kako sile moraju biti jednake nuli u dva neopterećena ugaona čvora u kojima se spajaju dva štapa.



2) Određivanje sila u štapova grafičkom metodom čvorova

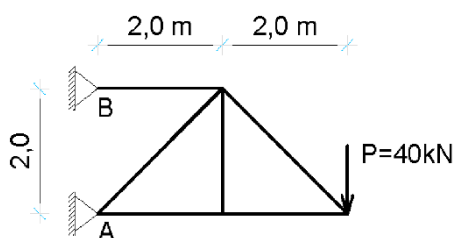
Kako bismo odredili sile u označenom presjeku R-R, zamišljenim presjekom razdvojimo rešetkasti nosač na dva dijela i dalje rješavamo samo lijevi dio. Štapove koje smo presjekli zamjenjujemo silama S_1 , S_2 i S_3 . Sada na dijelu nosača koji analiziramo imamo 5 sila, pa za daljnji izračun moramo reducirati broj sila na najviše 4. To možemo napraviti na način da pronađemo rezultantu reakcije R_A i sile P_1 . Navedena rezultanta Rez omeđena je zrakama 1 i (S), pa na planu sila pronađemo sjecište tih dviju zraka i nacrtamo rezultantu.



Sada imamo četiri sile (Rez , S_1 , S_2 i S_3) koje možemo riješiti pomoću Culmannova pravca. Postavimo Culmannov pravac kroz točke gdje se sijeku S_1 , S_2 s jedne strane te Rez i S_3 s druge strane. Prenesemo $C.P.$ u poligon sila i riješimo ravnotežu (zatvorimo trokut sila) Rez , S_3 i $C.P.$. Nakon toga riješimo ravnotežu (zatvorimo trokut sila) $C.P.$, S_1 , S_2 . Kako sila S_2 leži na istom pravcu na kojem je i $C.P.$, preostala sila S_1 mora biti jednaka nuli.

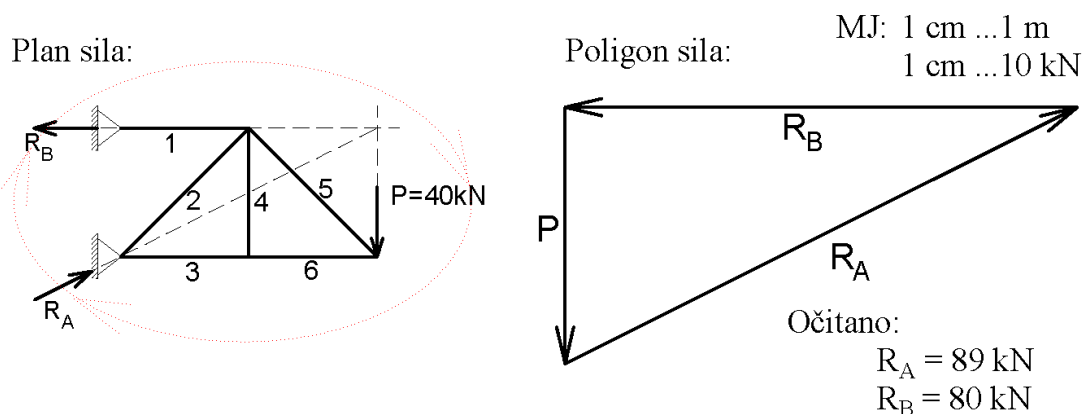
Na kraju prenesemo dobivene orijentacije sila te pomoću mjerila očitamo vrijednosti sila iz poligona sila. Orijentacija sile S_2 govori nam kako je sila u tom štapu vlačna (+), dok je orijentacija sile S_3 tlačna (-).

6.6.5. Rešetkaste konstrukcije – 5. primjer



Zadan je konzolni rešetkasti nosač opterećen silom P . Potrebno je metodom Cremona odrediti sile u svim štapovima.

1) Određivanje reakcija



Kako bismo odredili reakcije, sjetimo se prvog grafičkog uvjeta ravnoteže; tri sile su u ravnoteži kada se sijeku u istoj točki. Kako znamo pravac sile P , a reakcija R_B mora ležati na pravcu

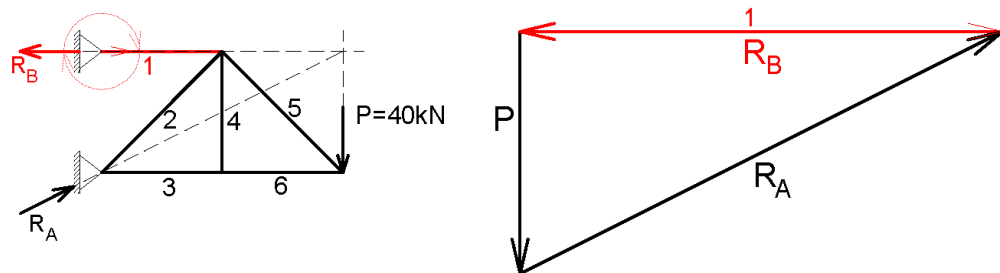
jedinog štapa koji se priključuje na oslonac B, produžimo pravce sila i pronađemo njihovo sjecište. Preostala reakcija R_A mora prolaziti kroz to sjecište i točku oslonca B.

Prenesemo pravce sila u poligon sila, pri čemu je bitan redoslijed crtanja sila. Sile nanosimo u poligon redoslijedom kako na njih nailazimo obilazeći oko sustava u smjeru kazaljke na satu. Dakle, polazimo od poznate sile P koju nacrtamo u mjerilu, zatim nanesimo pravac reakcije R_A kroz vrh sile P , pa nakon toga pravac reakcije R_B kroz početak sile P . Zatvorimo poligon sila, prenesemo orijentacije sila na plan sila i pomoću mjerila očitamo vrijednosti dobivenih reakcija.

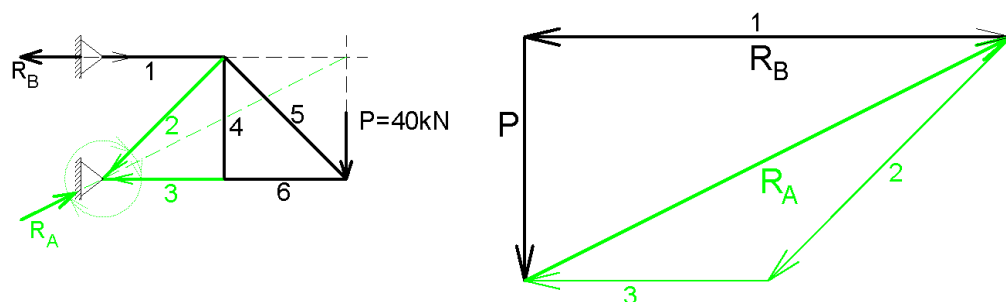
2) Određivanje sila u štapovima grafičkom metodom Cremona

Kada smo odredili reakcije, prelazimo na određivanje sila u štapovima. Kod metode Cremona svaku silu, uključujući i reakcije, prikazujemo samo jednom na papiru. Stoga na poligonu sila na kojem smo riješili reakcije u nastavku rješavamo sve sile u štapovima. Zbog boljeg razumijevanja i redoslijeda rada ovdje će se zadatak riješiti korak po korak.

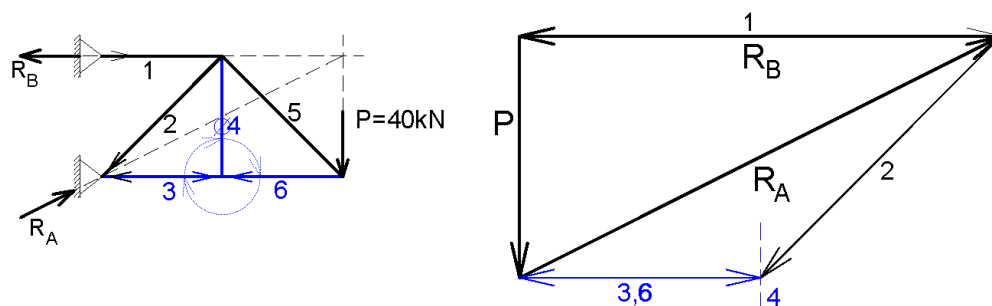
Najprije numeriramo sve štapove i krećemo s rješavanjem čvora u kojem imamo bar jednu poznatu i najviše dvije nepoznate sile. Riješimo najprije čvor B u kojem imamo samo reakciju R_B i silu u štapu 1. Kako smo reakciju R_B već ranije odredili i prikazana je u poligonu, sila u štapu 1 mora biti jednaka, ali suprotnog smjera. Dobivenu orijentaciju sile 1 prenesemo na plan sila.



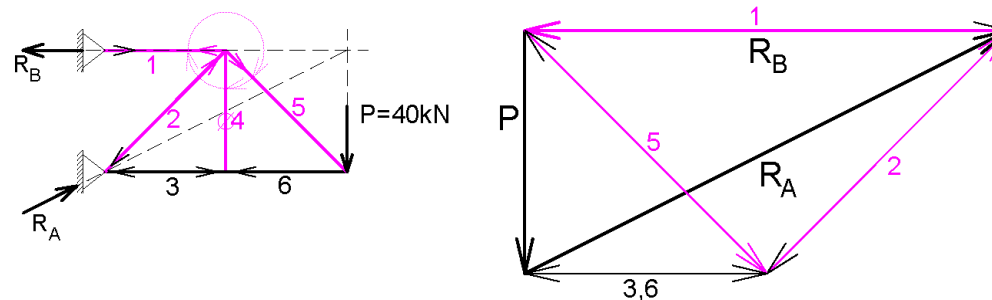
Zatim rješavamo čvor A u kojem nam je poznata reakcija R_A , a tražimo sile u štapovima 2 i 3. Sile nanosimo u poligon sila redoslijedom kako na njih nailazimo obilazeći oko čvora u smjeru kazaljke na satu, počevši od prve poznate sile. Znamo reakciju R_A , u njezin vrh postavimo pravac sile u štapu 2, a pravac sile u štapu 3 postavimo u početak reakcije R_A . Zatvorimo poligon sila, te prenesemo dobivene orijentacije sila 2 i 3 na plan sila.



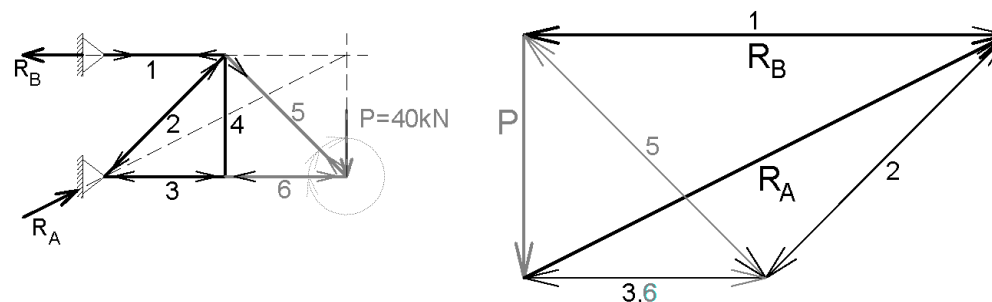
Nakon toga prelazimo na čvor u kojem imamo od ranije određenu silu u štapu 3, a tražimo sile u štapovima 4 i 6. Najprije okrenemo orijentaciju sile u štapu 3. Sila u štapu 4 okomita je na štapove 3 i 6, pa su sile u štapovima 4 i 6 jednake i suprotnog smjera, a sila u štapu 4 mora biti jednaka nuli.



U idućem čvoru imamo poznate sile u štapovima 1 i 2, a tražimo silu u štapu 5 (*sila u štapu 4 iznosi nula*). Okrenimo orijentacije ranije određenih sila 1 i 2 pa riješimo i taj čvor.

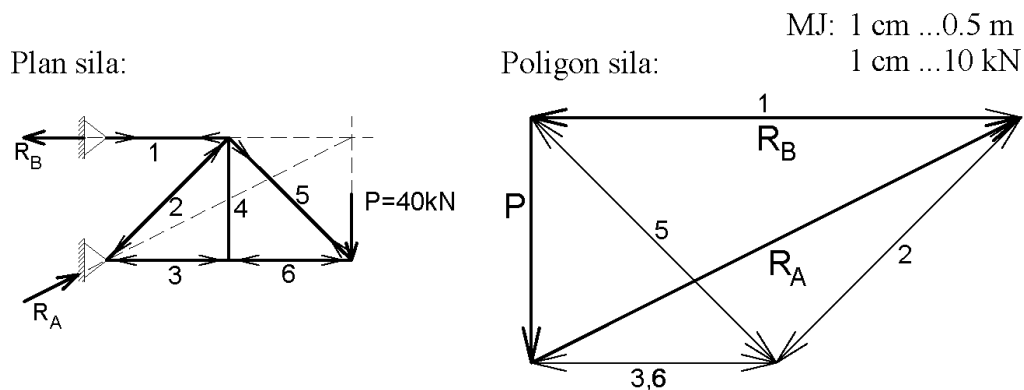


Na kraju ostaje zadnji čvor u kojem su poznate sve sile, pa on služi za provjeru.



Konači izgled Cremonina plana sila za ovaj zadatak izgleda kako je prikazano u nastavku. Ovdje su sve vanjske i unutarnje sile prikazane samo jednom.

Na kraju pomoću mjerila očitamo vrijednosti sila iz poligona sila, a orijentacija na planu sila govori nam kako su sile u štapovima 2, 3 i 6 tlačne (-), dok su sile u štapovima 1 i 5 vlačne (+).



Sile u štapovima (kN):

Štap:	1	2	3	4	5	6
V(+)	80			0	57	
T(-)		57	40	0		40

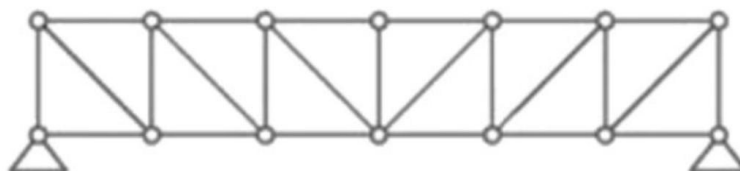
Očitano:

$R_A = 89 \text{ kN}$

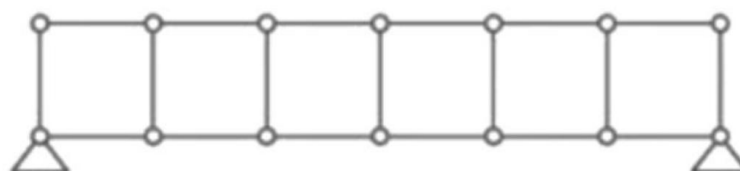
$R_B = 80 \text{ kN}$

6.7. Vierendeelov nosač

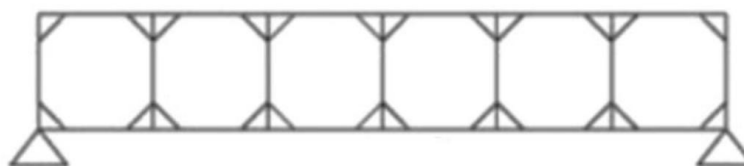
Na tragu ideje o povećanju nosivosti pomoću principa rešetkastog nosača, belgijski inženjer **Arthur Vierendeel** (1852. – 1940.) osmislio je specifičan tip nosača čiji su **gornji i donji pojas** povezani isključivo **vertikalnim elementima** – **bez dijagonala**, koje su inače karakteristične za klasične rešetkaste sustave. S obzirom na to da je osnovni element njegova nosača četverokut, veza između vertikala i pojasa morala je biti kruta kako bi se osigurala stabilnost.



a) Stabilni rešetkasti nosač – formirani stabilni trokuti s dijagonalama koji osiguravaju stabilnost



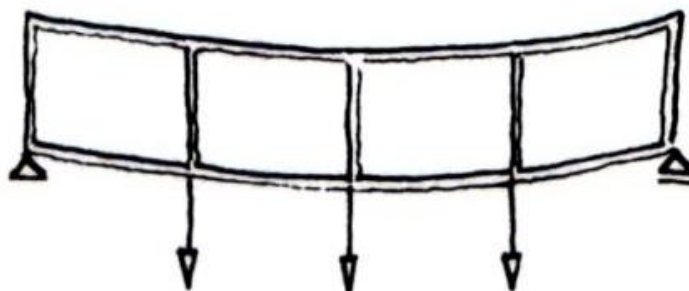
b) Nestabilni rešetkasti nosač – spojevi štapova su zglobovi bez dijagonala → kinematski mehanizam



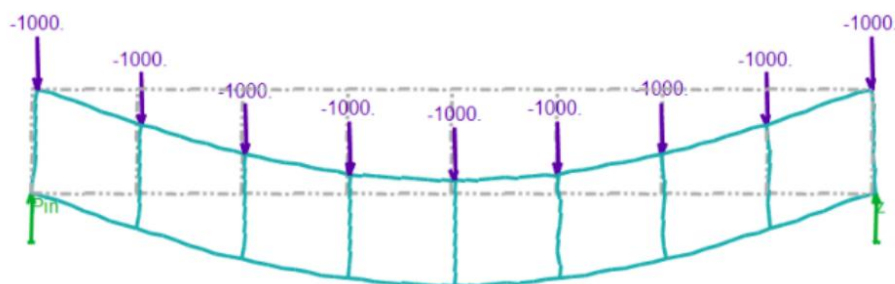
c) Stabilni Vierendeelov nosač – spojevi štapova su kruti

Slika 6.37. Logična transformacija s klasičnog rešetkastog nosača na Vierendeelov nosač

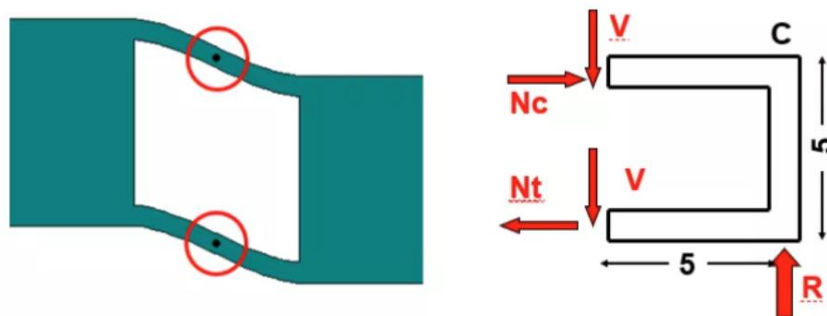
Osnovni je element ovog nosača **pravokutni okvir**, pri čemu su spojevi između vertikala i pojasa **kruti**, što znači da prenose i **momente savijanja**. Za razliku od rešetkastih nosača, kod kojih su čvorovi obično zglobovi i sile se prenose samo kao **osne sile**, u Vierendeelovom nosaču svaki element je opterećen i **momentima savijanja, posmičnim silama i osnim silama**.



Slika 6.38. Izgled opterećenog i deformiranog Vierendeelova nosača



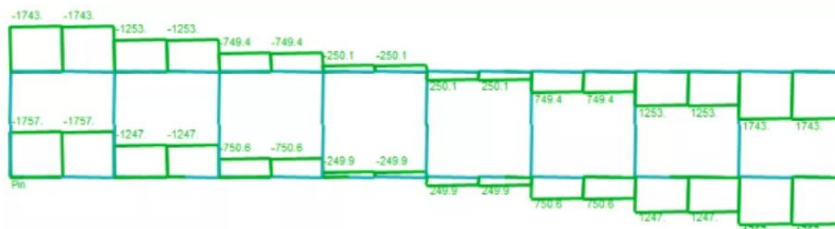
a) Opterećeni i deformirani Vierendeelov nosač s 8 polja



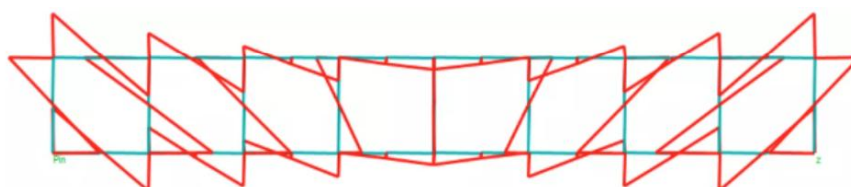
b) Prikaz unutarnjih sila koje se javljaju u pojasnicama – ravnoteža dijela uz ležaj



c) Prikaz uzdužnih sila u pojasnicama – u gornjoj pojasnici je tlak, a u donjoj je vlak



d) Prikaz poprečnih sila u pojasnicama – pojasnice za razliku od klasičnih rešetki imaju velike poprečne sile, pogotovo što su bliže ležaju (isto je i s vertikalnim štapovima)



e) Prikaz momenata savijanja u štapovima – vidljivi značajni momenti na mjestu krutih veza

Slika 6.39. Izgled opterećenog, deformiranog Vierendeelova nosača s unutarnjim silama – vidljivo da osim uzdužnih sila ima i savijanje štapova (slično okvirnim konstrukcijama)

Prikaz unutarnjih sila u Vierendeelovu nosaču

Za razliku od rešetkastih nosača, kod kojih se sile prenose uglavnom osno, u Vierendeelovu nosaču elementi su opterećeni kao **grede** i **okviri** – svaki pravokutni otvor ponaša se poput **okvira opterećenog vertikalnim silama**.

U tipičnom Vierendeelovu nosaču s više polja:

- **gornji pojas** većinom je tlačno opterećen i na savijanje
- **donji pojas** vlačno je opterećen i na savijanje
- **vertikale** prenose posmične sile i imaju značajne momente savijanja
- u čvorovima se javljaju izraženi **momentni skokovi**, osobito kod promjena opterećenja.

Zbog toga je analiza ovog nosača **složenija** od analize klasične rešetke i zahtijeva upotrebu metoda za rješavanje krutih okvira (npr. metoda konačnih elemenata, metoda krutih veza i sl.).

Prvi takav nosač, raspona 31,5 metara, predstavljen je krajem 19. stoljeća na Svjetskoj izložbi u Bruxellesu. Ubrzo nakon toga, Vierendeelov koncept našao je primjenu u **željezničkoj infrastrukturi**, gdje je zamijenio dotad dominantne rešetkaste konstrukcije.



Slika 6.40. Vierendeelov most u Gremmene u Belgiji – vidljivi kruto oblikovani čvorovi

U suvremenoj arhitekturi, Vierendeelov nosač često se koristi kao **visokostijeni nosač**, osobito na pročeljima javnih, poslovnih i stambeno-poslovnih zgrada. Visokostijeni nosači imaju visinu veću ili jednaku polovini raspona, a često se izvode u visini jedne ili više etaža. Njihova je prednost u odnosu na rešetkaste nosače u **slobodnijoj organizaciji prostora** i mogućnosti izvedbe većih otvora na pročeljima jer **nema kosih dijagonala** koje bi ometale raspored.

Iako je izvorno zamišljen kao čelična konstrukcija, Vierendeelov nosač se danas često izvodi od **armiranog betona**, jer je u tom materijalu **lakše izvesti krute veze** u čvorovima. Naime, zbog velikih unutarnjih sila koje nastaju u spojevima, izvedba u čeliku zahtijeva složeniju i skuplju tehnologiju.



Slika 6.41. Zgrada na Cvjetnom trgu u Zagrebu - suvremena primjena Vierendeelova nosača

6.8. Ostale sastavljene konstrukcije

Neke sastavljene konstrukcije ne mogu se svrstati ni u jednu od prethodno obrađenih tipologija. One su često **kombinacija više konstrukcijskih sustava** ili sadrže **različite tipove elemenata** koji zajednički djeluju.

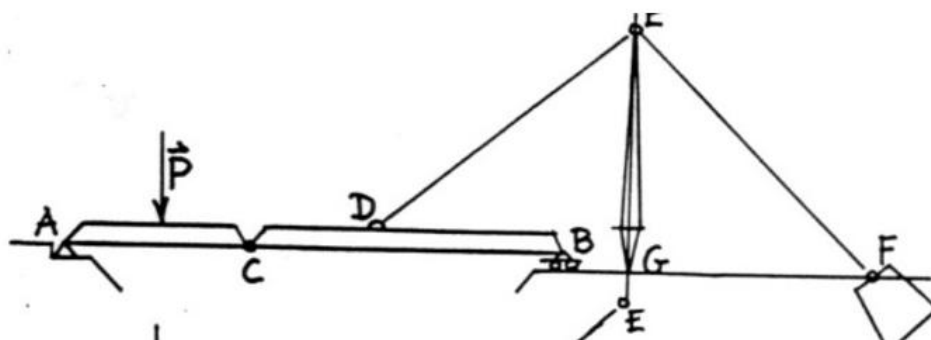
Na sljedećem primjeru (slika 6.42.) prikazana je **ovješena konstrukcija mosta**. Želimo li odrediti **reakcije na osloncima** i **sile u štapovima**, prvi je korak **analiza karakteristika pojedinih elemenata**.

Konstrukcija se sastoji od:

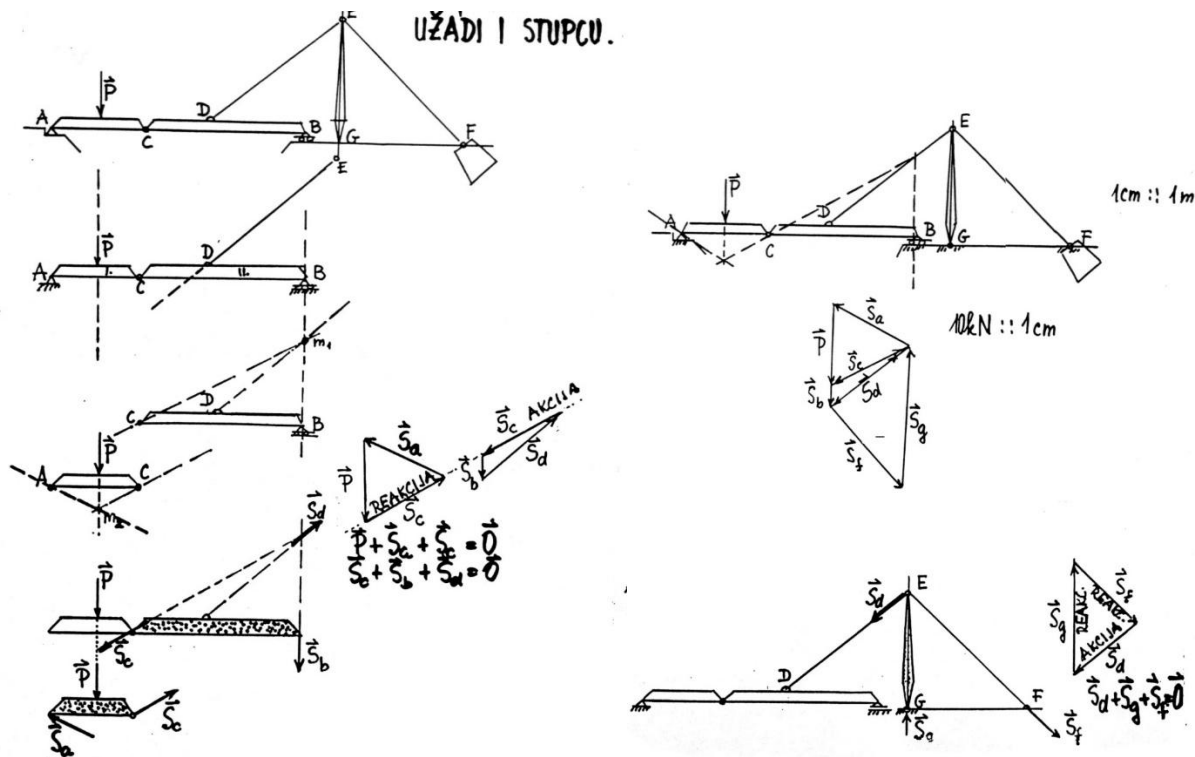
- **Gerberova nosača** (greda mosta)
- **triju štapova**: dviju **zatega** i jednog **stupa**.

Oslonci:

- ležajevi **A** i **G** su **nepomični zglobni oslonci**
- ležaj **B** je **klizni zglobni oslonac**.



Slika 6.42. Primjer sastavljene konstrukcije – zavješeni most s Gerberovim nosačem

Analiza ravnoteže – grafički postupak

Na **izdvojenoj desnoj strani Gerberova nosača** djeluju tri sile:

1. sila u zatezi (**štap D–E**) – poznat je njezin pravac
2. reakcija na ležaju **B** – poznat je pravac djelovanja
3. reakcija u **zglobu C** – pravac djelovanja treba odrediti.

Budući da se radi o **ravninskom sustavu s tri sile**, poznato je da se **uvjet ravnoteže** može ispuniti samo **ako se pravci svih triju sila sijeku u jednoj točki**. Iz toga slijedi da i **pravac sile u zglobu C** mora prolaziti **sjecištem pravaca prvih dviju sila**.

Nakon što je određen pravac sile u zglobu C, može se analizirati **lijeva strana Gerberova nosača**. I ovdje imamo tri sile:

- sila u zglobu **C** (već poznat pravac)
- vanjska sila **P** (poznat pravac – vertikalna)
- reakcija na ležaju **A** (nepoznat pravac).

Primjenom istog pravila o sjecištu pravaca, određuje se i pravac reakcije u točki A. Na temelju tih triju pravca zatvara se **trokut sila**, kojim se mogu grafički ili analitički odrediti veličine svih triju sila.

Određivanje sila u štapovima

Kad je poznata veličina sile u zglobu C, može se formirati novi **trokut sila** između:

- sile u zglobu **C**
- sile u zatezi **D–E**
- reakcije na ležaju **B**.

Iz tog trokuta određuju se **preostale nepoznate sile**.

Ostaje još odrediti:

- **vlačnu silu u zatezi E–F**
- **tlačnu silu u stupu E–G.**

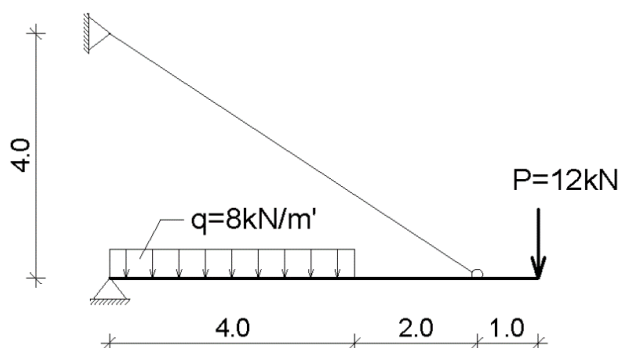
Te se sile određuju iz još jednog trokuta sila. U ovom slučaju koristimo se **izdvojenim čvorom E** na vrhu stupa, koji predstavlja **centralni sustav sila**. Taj sustav čine:

- dvije zatege (**D–E** i **E–F**) – vlačne sile
- jedan stup (**E–G**) – tlačna sila.

Zatvaranjem trokuta sila potvrđuje se **ravnoteža čvora** i omogućuje određivanje svih sila u sustavu.

U nastavku je riješen primjer grednog nosača s prepustom obješen kosom vješaljkom (štapom).

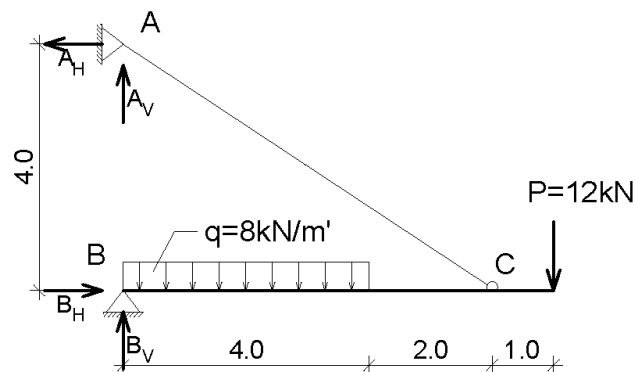
6.8.1. Sastavljene konstrukcije – 1. primjer



Treba odrediti i nacrtati dijagrame unutarnjih sila za prikazanu sastavljenu konstrukciju.

1) Određivanje reakcija

Prvi je korak u rješavanju zadatka određivanje reakcija, pa najprije pretpostavimo njihov smjer, a kako bismo dobili ispravnu orijentaciju, sjetimo se da je reakcija suprotna od akcije. Ako zamislimo kako će se deformirati zadani sustav, možemo uočiti kako se uslijed djelovanja kontinuiranog opterećenja q i sile P element AC rasteže, odnosno točka A ima tendenciju pomaka udesno, prema dolje. To znači kako će reakcija A djelovati suprotno (kako bi spriječila navedeni pomak), dakle A_H djeluje ulijevo, a A_V prema gore. Po istoj logici možemo pretpostaviti orijentaciju reakcija B_H i B_V . Sada možemo izračunati reakcije primjenom analitičkih uvjeta ravnoteže.



$$\sum M_B = 0$$

$$A_H \cdot 4,0 - q \cdot 4,0 \cdot 2,0 - P_y \cdot 7,0 = 0$$

$$A_H = \frac{8,0 \cdot 4,0 \cdot 2,0 + 12,0 \cdot 7,0}{4,0} = 37,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

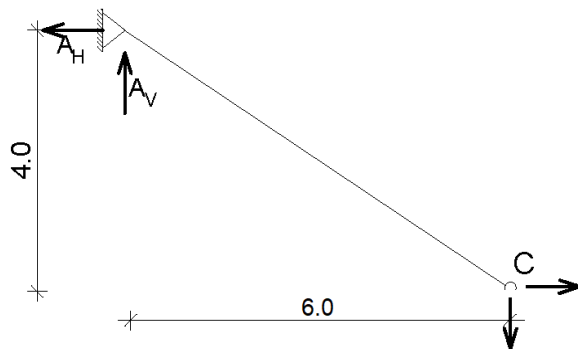
$$B_y \cdot 4,0 - q \cdot 4,0 \cdot 2,0 - P_y \cdot 7,0 = 0$$

$$B_y = \frac{8,0 \cdot 4,0 \cdot 2,0 + 12,0 \cdot 7,0}{4,0} = 37,0 \text{ kN}$$

Vertikalne reakcije možemo izračunati na dva načina. Prvi i najjednostavniji način jest da uočimo kako je element AC štap, pa znamo kako reakcija A mora ležati na pravcu štapa. Iz toga proizlazi kako je omjer vertikalne i horizontalne komponente reakcije A jednak omjeru stranica trokuta koji zatvara dužina AC s vertikalnom i horizontalnom stranicom.

$$\frac{A_V}{A_H} = \frac{4,0}{6,0}$$

$$A_V = 2/3 \cdot 37,0 = 24,67 \text{ kN}$$



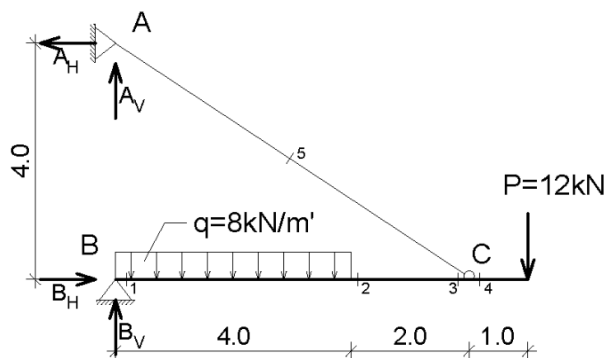
Drugi je način da sustav razdvojimo na dva dijela u poluzglobu C i analiziramo izdvojeni element AC s pripadajućim reakcijama u osloncu A. U točki C postoje unutarnje sile, no sigurno ne postoji moment jer se radi o zglobu (kada gledamo od strane elementa AC), pa možemo postaviti sumu momenata na točku C. Tako dobivamo omjer komponenti reakcija A_V i A_H , bez određivanja unutarnjih sila u (polu)zglobu C.

$$\Sigma M_C = 0$$

$$A_H \cdot 4,0 - A_V \cdot 6,0 = 0$$

$$A_V = \frac{4,0}{6,0} \cdot A_H = \frac{2}{3} \cdot 37,0 = 24,67 \text{ kN}$$

2) Određivanje unutarnjih sila



Kada smo odredili reakcije, prelazimo na izračun unutarnjih sila. Prema pravilima za određivanje dijagrama unutarnjih sila trebamo postaviti presjeke neposredno prije i poslije svake od sila, odnosno na mjestu promjene opterećenja. Tako dobivamo presjeke 1 - 4, presjek neposredno prije sile P nam nije potreban, a na štapu AC postavljamo samo jedan presjek broj 5 (bilo gdje na štapu), jer se uzduž štapa ne mijenjaju unutarnje sile.

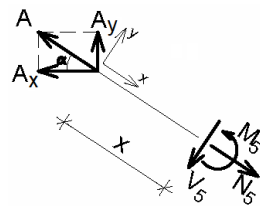
Presj.	Skica	Unutarnje sile
1		$N_1 = -B_H = -37,0 \text{ kN}$ $V_1 = B_V = 19,33 \text{ kN}$ $M_1 = 0$
2		$N_2 = -B_H - 37,0 \text{ kN}$ $V_2 = B_V - q \cdot 4,0 = -12,67 \text{ kN}$ $M_2 = B_V \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 13,32 \text{ kNm}$
3		$N_3 = -B_H - 37,0 \text{ kN}$ $V_3 = B_V - q \cdot 4,0 = -12,67 \text{ kN}$ $M_3 = B_V \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 4 = -12,02 \text{ kNm}$
4		$N_4 = 0$ $V_4 = P = 12,0 \text{ kN}$ $M_4 = -P \cdot 1 = -12,0 \text{ kNm}$
5		$N_5 = A$ $N_5 = \sqrt{A_H^2 + A_V^2}$ $N_5 = 44,47 \text{ kN}$
$M_{\max}$		$x = V/q = 19,33/8 = 2,42 \text{ m}$ $M_{\max} = B_V \cdot x - q \cdot x \cdot x/2$ $M_{\max} = 19,33 \cdot 2,42 - 8 \cdot 2,42 \cdot 2,42/2$ $M_{\max} = 23,35 \text{ kNm}$

Uočimo kako u presjecima 1, 2 i 3 analiziramo samo segment grede BC, dok štap AC i oslonac A nisu uključeni u analizu. Za kontrolu dosadašnjeg izračuna usporedimo dobivenu vrijednost momenta u presjeku 4 s vrijednošću momenta u presjeku 3. Kako se radi o istoj točki, vrijednost bi trebala biti ista, a ako i postoji minimalna razlika, ona nastaje zbog zaokruživanja. U presjeku 5 određujemo unutarnje sile u štapu AC, pa znamo da poprečna sila i moment savijanja moraju biti jednaki nuli. Iznos uzdužne sile N možemo izračunati zbrajanjem uzdužnih komponenti sila A_H i A_V po lokalnoj osi x ili, jednostavnije, odrediti rezultantu reakcije A primjenom Pitagorina poučka. U drugom slučaju pripazimo na predznak uzdužne sile, koji moramo sami odrediti ovisno o orijentaciji sile N_5 i reakcije A .

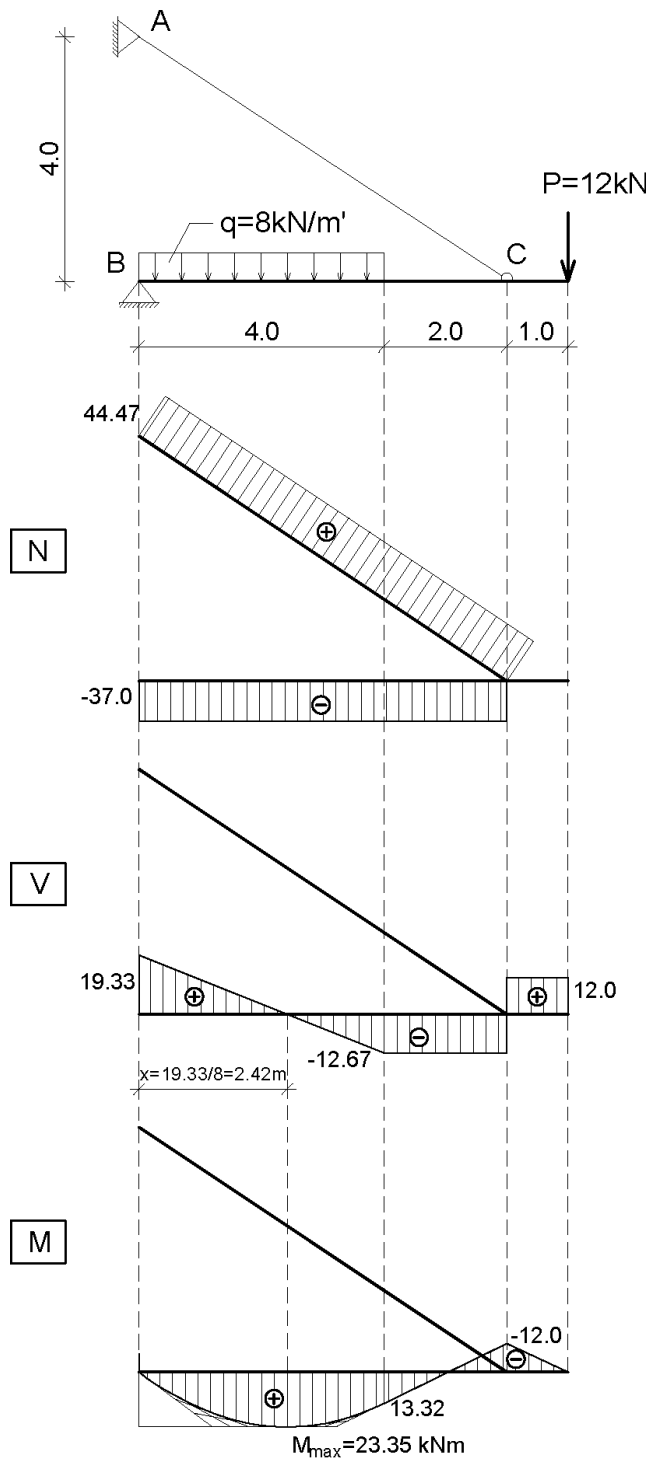
$$N_5 = A_H \cdot \cos \alpha + A_V \cdot \sin \alpha$$

$$N_5 = 37 \cdot \cos \alpha + 24,67 \cdot \sin \alpha = 44,47 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha = \frac{4,0}{6,0} \rightarrow \alpha = 33^\circ 41' 24''$$



3) Određivanje dijagrama unutarnjih sila



Na dijagramu uzdužnih sila možemo vidjeti kako se uzdužna sila javlja na štapu AC i gredi između točaka B i C. Pri tome je na štapu AC uzdužna sila vlačna, dok je na gredi između točaka B i C ona tlačna. To odgovara očekivanoj deformaciji sustava, odnosno početnoj analizi kada smo određivali smjer reakcija A i B. Na prepustu grede, desno od poluzgloba C, nema uzdužne sile, jer nema utjecaja od kojeg bi nastala.

Na dijagramu poprečnih sila možemo vidjeti kako se mijenja u skladu sa silama koje djeluju poprečno na gredi, što se u ovom slučaju poklapa s vertikalnim silama.

Na momentnom dijagramu vidimo kako u krajnjim točkama imamo vrijednosti momenta jednake nuli, a na mjestu poluzgloba C imamo lom koji nastaje od vertikalne komponente sile u štapu AC.

7. Geometrijska svojstva ploha, naprezanja i deformacije

Svaki statički proračun konstrukcije temelji se na **dvama osnovnim koracima**:

1. **dimenzioniranju konstrukcijskih elemenata**
2. **dokazu njihove mehaničke otpornosti i stabilnosti.**

Za provođenje potpunog proračuna nije dovoljno poznavati samo vrste opterećenja i statički sustav, već je nužno razumjeti i **mehaničko ponašanje materijala**, odnosno **otpornost materijala** – granu fizike koja proučava kako se tijela opiru vanjskim silama, deformacijama i lomovima.

Otpornost materijala omogućuje nam:

- da povežemo **opterećenja s unutarnjim silama i napreznjima**
- da razumijemo kako **geometrijska svojstva presjeka** utječu na nosivost i deformacije
- da izračunamo granične vrijednosti koje konstrukcijski elementi mogu podnijeti **prije nego dođe do oštećenja, izvijanja ili loma.**

U ovom poglavlju obrađujemo temeljne pojmove koji čine osnovu svakog statičkog proračuna:

- **geometrijska svojstva ploha** (površina, težište, moment inercije, moment otpora)
- **naprezanja** (normalna i posmična)
- osnovne **deformacije i stabilnost elemenata.**

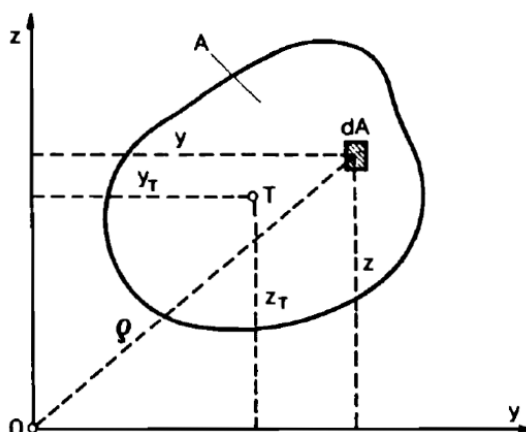
7.1. Geometrijska svojstva ploha

U građevnoj statici i otpornosti materijala, ključno je razumjeti kako geometrija poprečnog presjeka utječe na ponašanje konstrukcijskih elemenata pod opterećenjem. Geometrijska svojstva presjeka određuju kapacitet prijenosa unutarnjih sila i otpornost na deformacije, naprezanja i gubitak stabilnosti. Ona su temelj za proračun nosivosti elemenata poput greda, stupova i ploča te omogućuju pouzdano i ekonomično dimenzioniranje konstrukcija.

Najvažnija geometrijska svojstva presjeka jesu: površina presjeka, težište, statički momenti površine, moment tromosti (moment inercije), moment otpora i radijus inercije. Svako od njih ima svoju ulogu u analizi ponašanja elemenata pri djelovanju različitih vrsta opterećenja što će biti pojašnjeno u sljedećim poglavljima o napreznju i deformaciji.

Ovdje će se samo ukratko opisati izrazi za izračun najvažnijih geometrijskih svojstava i kako se oni računaju. Za detaljniju teorijsku analizu i proračun geometrijskih svojstava autori upućuju na literaturu: [7] Šimić, V.: *Otpornost materijala I*.

Opći poprečni presjek smješten u ravninski koordinatni sustav, koji je osnova za proračun geometrijskih svojstava, dan je na slici 7.1. Primjenom odgovarajućih izraza (integracijom dijelova površine prikazanog presjeka) određuju se najvažnija geometrijska svojstva.



Slika 7.1. Prikaz općeg oblika poprečnog presjeka smještenog u koordinatni sustav

1. Površina (ploština) presjeka – A

Površina presjeka predstavlja ukupnu veličinu poprečne površine elementa kroz koji djeluje unutarnja sila. Ključna je za izračun naprezanja, stabilnosti i nosivosti.

Opći izraz:

$$A = \int_A dA \quad (7.1.)$$

gdje je: A – ukupna ploština presjeka koja nastaje integracijom dA; dA – elementarna (malena) površina unutar presjeka.

Jedinica:

[mm²], [cm²], [m²] (ovisno o skali crteža i kontekstu)

Koristi se za:

- izračun normalnog naprezanja: $\sigma = N / A$
- određivanje ukupne mase i težine konstrukcijskog elementa
- određivanje težišta i ostalih geometrijskih svojstava.

2. Statički moment površine – S

Statički moment površine opisuje raspodjelu površine presjeka u odnosu na neku os. Njime se ne koristimo za proračun naprezanja, ali je važan kod određivanja posmičnih naprezanja i kod izračuna težišta.

Opći izraz:

$$S_y = \int z \cdot dA \quad S_z = \int y \cdot dA \quad (7.2.)$$

gdje je: S_y – statički moment površine u odnosu na os y; S_z – statički moment površine u odnosu na os z; dA – elementarna (malena) površina unutar presjeka; z, y – udaljenost dA do referentne osi.

Jedinica:

[mm³], [cm³], [m³]

Koristi se za:

- računanje posmičnih naprezanja: $\tau = (V \cdot S) / (b \cdot I)$
- određivanje težišta presjeka.

3. Težište presjeka

Težište je točka unutar presjeka kroz koju „prolazi“ ravnoteža površine. To je i os simetrije kod simetričnih presjeka.

Opći izraz:

$$y_t = \frac{S_z}{A} \quad z_t = \frac{S_y}{A} \quad (7.3.)$$

gdje je: y_t, z_t – udaljenosti od referentnih osi – definiraju položaj težišta; S_y, S_z – statički momenti površine u odnosu na os y i z ; A – ploština presjeka.

Pojednostavljeni izraz za složene presjeke:

$$y_t = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{A_{uk}} \quad z_t = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A_{uk}} \quad (7.4.)$$

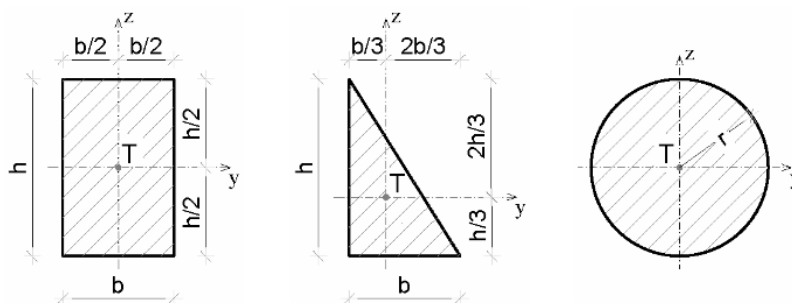
gdje su: y_t, z_t – udaljenosti od referentnih osi – definiraju položaj težišta; z_i, y_i – udaljenosti tih pojedinih površina do referentnih osi; A_i – ploština dijela presjeka; A_{uk} – ukupna ploština presjeka koja odgovara zbroju A_i .

Jedinica:

[mm], [cm], [m]

Koristi se za:

- određivanje položaja neutralne osi kod savijanja
- lociranje maksimalnih naprezanja u presjeku
- sve složenije statičke analize.



Slika 7.2. Položaj težišta presjeka za jednostavne i najčešće korištene presjeke

4. Moment tromosti (moment inercije) – I

Moment tromosti mjeri otpor presjeka savijanju. Što je veća udaljenost mase (površine) od neutralne osi, to je veći otpor savijanju.

Opći izraz:

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \quad I_z = \int_A y^2 \cdot dA \quad (7.5.)$$

gdje je: I_y – moment inercije u odnosu na os y ; I_z – moment inercije u odnosu na os z ; z, y – udaljenost dA do referentne osi; dA – elementarna (malena) površina unutar presjeka.

Pojednostavljeni izraz – Steinerovo pravilo:

Moment tromosti s obzirom na zadanu os jednak je zbroju momenta tromosti s obzirom na paralelnu težišnu os i umnoška površine presjeka i kvadrata udaljenosti zadane i težišne osi (Steinerov stavak).

$$I_y = \Sigma I_{yi} + \Sigma A_i \cdot z_i^2 \quad I_z = \Sigma I_{zi} + \Sigma A_i \cdot y_i^2 \quad (7.6.)$$

gdje je: I_y – moment inercije u odnosu na os y; I_z – moment inercije u odnosu na os z; I_{yi} – moment inercije u odnosu na os y za dio presjeka; I_{zi} – moment inercije u odnosu na os z za dio presjeka; A_i – ploština dijela presjeka; z_i, y_i – udaljenosti tih pojedinih površina do referentnih osi.

Jedinica:

[mm⁴], [cm⁴], [m⁴]

Koristi se za:

- izračun naprezanja pri savijanju: $\sigma = M \cdot y / I$
- u formuli za posmično naprezanje
- u proračunima deformacija i stabilnosti (npr. izvijanje: $P_{kr} = \pi^2 \cdot E \cdot I / L^2$).

Momenti tromosti za jednostavne presjeke:

a) Moment tromosti pravokutnog presjeka oko težišne osi:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_z = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad (7.7.)$$

gdje je: b – širina pravokutnog presjeka; h – visina pravokutnog presjeka. (Vidi sliku 7.2.)

b) Moment tromosti trokutnog presjeka oko težišne osi

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad I_z = \frac{h \cdot b^3}{36} \quad (7.8.)$$

gdje je: b – širina trokutastog presjeka; h – visina trokutastog presjeka. (Vidi sliku 7.2.)

c) Moment tromosti kružnog presjeka oko težišne osi

$$I = \frac{r^4 \pi}{4} \quad (7.9.)$$

gdje je: r – radijus kružnog presjeka. (Vidi sliku 7.2.)

Moment tromosti složenih presjeka možemo odrediti kao zbroj ili razliku momenata tromosti svake pojedinačne površine na težišnu os složenog presjeka koristeći se već navedenim Steinerovim pravilom.

5. Moment otpora – W

Moment otpora predstavlja geometrijsku veličinu koja opisuje otpornost poprečnog presjeka na savijanje. Moment otpora definira se kao omjer momenta inercije i udaljenosti od neutralne osi do najudaljenije točke presjeka

Opći izraz:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} \quad W_z = \frac{I_z}{y_{max}} \quad (7.10.)$$

gdje je: W_y – moment otpora u odnosu na os y; W_z – moment otpora u odnosu na os z; I_y – moment inercije u odnosu na os y; I_z – moment inercije u odnosu na os z; z_{max}, y_{max} – udaljenosti od težišta do najudaljenije točke presjeka u smjeru odgovarajuće osi.

Opći izraz u praksi:

Uglavnom se analiziraju najudaljenije točke dolje i gore od težišta pa govorimo o momentima otpora gore i dolje. Stoga izraze često pišemo na ovaj način:

$$W_{y,d} = \frac{I_y}{z_d} \qquad W_{y,g} = \frac{I_y}{z_g} \qquad (7.11.)$$

$$W_{z,d} = \frac{I_z}{y_d} \qquad W_{z,g} = \frac{I_z}{y_g} \qquad (7.12.)$$

gdje je: $W_{y,d}$ – moment otpora dolje u odnosu na os y; $W_{y,g}$ – moment otpora gore u odnosu na os y; $W_{z,d}$ – moment otpora dolje u odnosu na os z; $W_{z,g}$ – moment otpora gore u odnosu na os z; I_y – moment inercije u odnosu na os y; I_z – moment inercije u odnosu na os z; z_d – udaljenosti po z osi od težišta do donjeg ruba presjeka; z_g – udaljenosti po z osi od težišta do gornjeg ruba presjeka; y_d – udaljenosti po y osi od težišta do donjeg ruba presjeka; y_g – udaljenosti po y osi od težišta do gornjeg ruba presjeka;

Jedinica:

[mm³], [cm³], [m³]

Koristi se za:

- izračun naprezanja pri savijanju: $\sigma = M / W$
- analize složenih naprezanja i kosog savijanja.

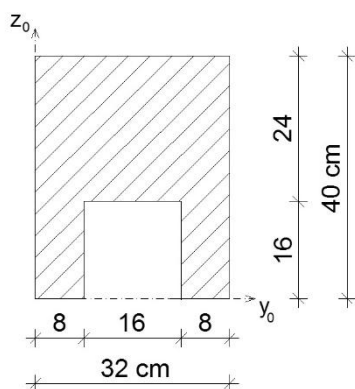
Momenti otpora za pravokutne presjeke:

a) Moment tromosti pravokutnog presjeka oko težišne osi:

$$W_y = \frac{I_y}{h/2} = \frac{b \cdot h^2}{6} \qquad W_z = \frac{I_z}{b/2} = \frac{h \cdot b^2}{6} \qquad (7.13.)$$

gdje je: b – širina pravokutnog presjeka; h – visina pravokutnog presjeka. (Vidi sliku 7.2.)

Slijede primjeri na kojima će se pokazati izračun prethodno opisanih geometrijskih karakteristika presjeka.

7.1.1. Geometrijska svojstva ploha – 1. primjer

Treba odrediti položaj težišta, momente inercije I_y i I_z , te momente otpora W_{y1} i W_{y2} za zadani presjek.

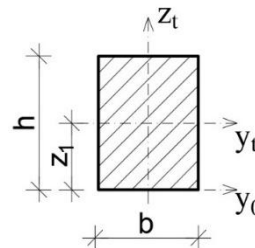
Prisjetimo se općenitih izraza za pravokutni presjek:

Površina:

$$A = b \cdot h$$

Moment inercije za pravokutni presjek:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$$



Ako želimo izračunati moment inercije oko neke druge osi, a koja nije težišna os, uvodimo Steinerov stavak. Navedeni stavak čini umnožak površine A i kvadrata udaljenosti od težišta navedene površine do osi na koju računamo moment inercije.

Tako na primjer moment inercije oko rubne osi y_0 odredimo pomoću izraza:

$$I_{y_0} = I_y + A \cdot z_1^2$$

Kada znamo izraze za pravokutni presjek, možemo izračunati navedene vrijednosti za bilo koji složeni presjek koji se može sastaviti ili rastaviti na pravokutne presjeke.

Zadanu površinu analiziramo kao veliki pravokutnik A_1 iz kojeg je izrezan manji pravokutnik površine A_2 . Izračunamo kako slijedi:

Površina: $A_1 = 32 \cdot 40 = 1280 \text{ cm}^2$

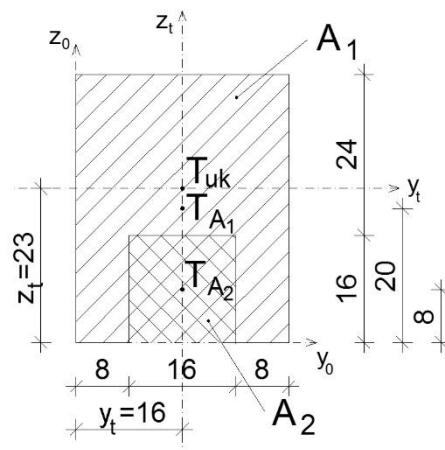
$$A_2 = 16 \cdot 16 = 256 \text{ cm}^2$$

$$A_{uk} = 1280 - 256 = 1024 \text{ cm}^2$$

Težište:

$$z_t = \frac{A_1 \cdot 20 - A_2 \cdot 8}{A_{uk}} = \frac{1280 \cdot 20 - 256 \cdot 8}{1024} = 23 \text{ cm}$$

$$y_t = \frac{A_1 \cdot 16 - A_2 \cdot 16}{A_{uk}} = \frac{A_{uk} \cdot 16}{A_{uk}} = 16 \text{ cm (očito)}$$



Momenti inercije:

$$I_y = \left(\frac{32 \cdot 40^3}{12} + A_1 \cdot (23 - 20)^2 \right) - \left(\frac{16 \cdot 16^3}{12} + A_2 \cdot (23 - 8)^2 \right) = 119125 \text{ cm}^4$$

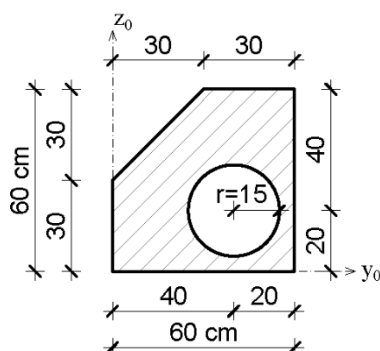
$$I_z = \left(\frac{40 \cdot 32^3}{12} + A_1 \cdot (16 - 16)^2 \right) - \left(\frac{16 \cdot 16^3}{12} + A_2 \cdot (16 - 16)^2 \right) = 103765 \text{ cm}^4$$

Momenti otpora:

$$W_{y,d} = \frac{I_y}{z_t} = \frac{119125}{23} = 5179 \text{ cm}^3$$

$$W_{y,g} = \frac{I_y}{40 - z_t} = \frac{119125}{17} = 7007 \text{ cm}^3$$

7.1.2. Geometrijska svojstva ploha – 2. primjer



Treba odrediti položaj težišta, momente inercije i momente otpora za zadani presjek.

Prisjetimo se općenitih izraza za pravokutni, trokutni i kružni presjek:

Presjek	Površina	Moment inercije
pravokutni	$A = b \cdot h$	$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$
trokut	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$I = \frac{b \cdot h^3}{36}$
krug	$A = r^2 \pi$	$I = \frac{r^4 \pi}{4}$

Kada znamo općenite izraze, možemo izračunati navedene vrijednosti za bilo koji složeni presjek koje se može sastaviti ili rastaviti na jednostavne presjeke. Ako želimo izračunati moment inercije oko neke druge osi, a koja nije težišna os, tada uvodimo Steinerov stavak. Navedeni stavak čini umnožak površine A i kvadrata udaljenosti od težišta navedene površine do osi na koju računamo moment inercije.

Zadanu površinu analiziramo kao kvadrat A_1 iz kojeg je izrezan trokut površine A_2 i krug površine A_3 . Izračunamo kako slijedi:

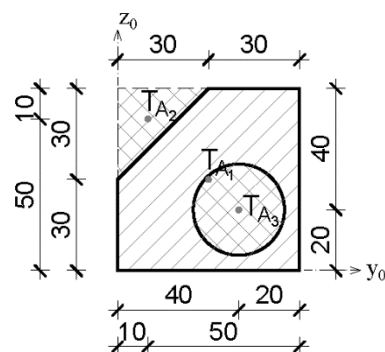
Površina:

$$A_1 = 60 \cdot 60 = 3600 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 30 \cdot 30 / 2 = 450 \text{ cm}^2$$

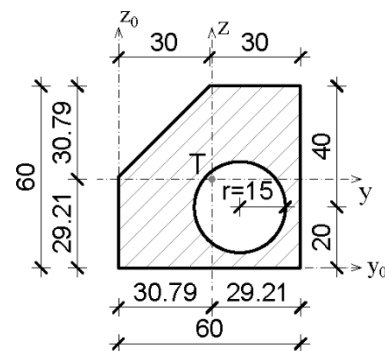
$$A_3 = 15^2 \cdot \pi = 706,86 \text{ cm}^2$$

$$A_{uk} = 3600 - 450 - 707 = 2443,14 \text{ cm}^2$$



Težište:

$$\begin{aligned}
 z_t &= \frac{A_1 \cdot 30 - A_2 \cdot 50 - A_3 \cdot 20}{A_{uk}} \\
 &= \frac{3600 \cdot 30 - 450 \cdot 50 - 706,86 \cdot 20}{2443,14} \\
 &= 29,21 \text{ cm} \\
 y_t &= \frac{A_1 \cdot 30 - A_2 \cdot 10 - A_3 \cdot 40}{A_{uk}} \\
 &= \frac{3600 \cdot 30 - 450 \cdot 10 - 706,86 \cdot 40}{2443,14} \\
 &= 30,79 \text{ cm}
 \end{aligned}$$



Momenti inercije:

$$\begin{aligned}
 I_y &= \left(\frac{60 \cdot 60^3}{12} + A_1 \cdot (29,21 - 30)^2 \right) - \left(\frac{30 \cdot 30^3}{36} + A_2 \cdot (29,21 - 50)^2 \right) \\
 &\quad - \left(\frac{15^4 \cdot \pi}{4} + A_3 \cdot (29,21 - 20)^2 \right) = 765526,37 \text{ cm}^4 \\
 I_z &= \left(\frac{60 \cdot 60^3}{12} + A_1 \cdot (30,79 - 30)^2 \right) - \left(\frac{30 \cdot 30^3}{36} + A_2 \cdot (30,79 - 10)^2 \right) \\
 &\quad - \left(\frac{15^4 \cdot \pi}{4} + A_3 \cdot (30,79 - 40)^2 \right) = 765526,34 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

Momenti otpora:

$$\begin{aligned}
 W_{y,d} &= \frac{I_y}{z_t} = \frac{765526,37}{29,21} = 26207,68 \text{ cm}^3 \\
 W_{y,g} &= \frac{I_y}{60 - z_t} = \frac{765526,37}{30,79} = 24862,82 \text{ cm}^3 \\
 W_{z,d} &= \frac{I_z}{y_t} = \frac{765526,34}{30,79} = 24862,82 \text{ cm}^3 \\
 W_{z,g} &= \frac{I_z}{60 - y_t} = \frac{765526,34}{29,21} = 26207,68 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

7.2. Naprezanja

Naprezanja u elementima konstrukcija nastaju uslijed djelovanja unutarnjih sila na poprečni presjek. Osnovna podjela naprezanja je na **normalna** - σ i **posmična** - τ naprezanja, ovisno o smjeru djelovanja sile u odnosu na presjek.

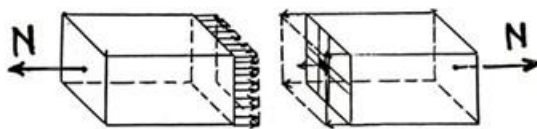
Normalna naprezanja nastaju uslijed djelovanja **uzdužnih sila (N)** i **momenta savijanja (M)**, dok posmična naprezanja proizlaze iz **poprečne sile (V)** i **momenta torzije (T)**. U ovom poglavlju nećemo se baviti torzijskim naprezanjima.

Normalna naprezanja

a) Normalno naprezanje od uzdužne sile N:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (7.13.)$$

gdje je: σ – normalno naprezanje u presjeku – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; N – uzdužna sila u presjeku; A – površina ili ploština poprečnog presjeka.



Slika 7.3. Prikaz djelovanja uzdužne sile i posljedično jednolikih normalnih naprezanja

b) Normalno naprezanje od momenta savijanja M:

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (7.14.)$$

gdje je: σ – normalno naprezanje u presjeku – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; M – moment savijanja u presjeku; I – moment tromosti oko osi oko koje je i savijanje; y – udaljenost točke u kojoj se određuje normalno naprezanje od težišta presjeka.

Kod savijanja, nulta linija normalnog naprezanja prolazi kroz **težište presjeka**. Na jednoj strani presjeka razvija se **zatezanje**, a na drugoj **tlačenje**.



Slika 7.4. Prikaz djelovanja momenta savijanja i posljedično linearno promjenjivih normalnih naprezanja po visini presjeka

Nas uglavnom zanimaju maksimalna naprezanja, a ona su najveća na najudaljenijim točkama presjeka od težišta. Stoga se maksimalna normalna naprezanja mogu odrediti preko izraza:

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad (7.15.)$$

gdje je: σ – normalno naprezanje u presjeku – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; M – moment savijanja u presjeku; W – moment otpora oko osi oko koje je i savijanje.

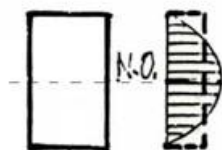
Posmična naprezanja

Posmična naprezanja pojavljuju se kada je sila paralelna s presjekom – poprečne sile V . Računaju se prema izrazu:

$$\tau = \frac{V \cdot S}{b \cdot I} \quad (7.16.)$$

gdje je: τ – posmično naprezanje u presjeku – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; V – poprečna sila u presjeku; I – moment tromosti oko osi okomito na smjer djelovanja poprečne sile; S – statički moment površine oko osi okomite na smjer sile V ; b – širina presjeka na mjestu točke u kojoj računamo posmično naprezanje τ .

Najveća vrijednost posmičnog naprezanja nalazi se u **težištu presjeka**.



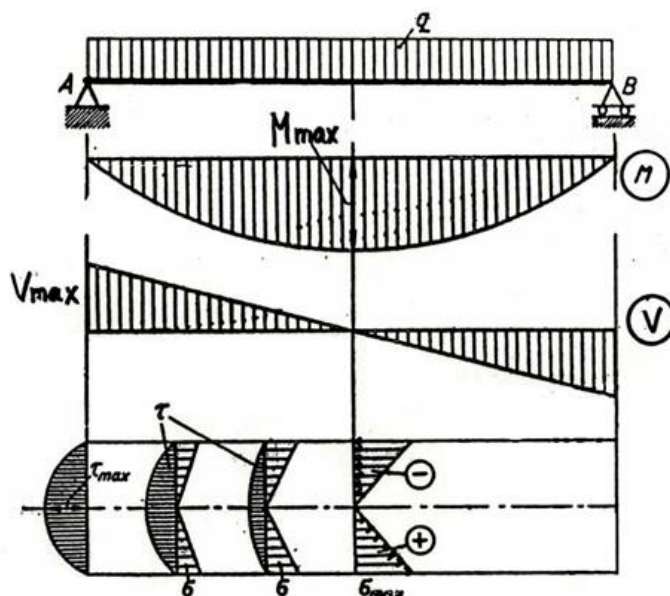
Slika 7.5. Prikaz djelovanja poprečne sile i raspodjele posmičnih naprezanja po visini presjeka

Za pravokutni presjek najveće posmično naprezanje iznosi:

$$\tau_{max} = 1,5 \cdot \frac{V}{A} \quad (7.17.)$$

gdje je: τ – posmično naprezanje u presjeku – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; V – poprečna sila u presjeku; A – površina poprečnog presjeka.

Generalno u konstrukcijama imamo djelovanje više vrsta unutarnjih sila. Posljedično tome u presjecima se javljaju i normalna i posmična naprezanja. Najbolji primjer za to je obična greda opterećena jednolikim opterećenjem prikazana na slici 7.5. Na toj slici se može vidjeti promjena normalnih i posmičnih naprezanja u presjecima ovisno o promjeni unutarnjih sila.



Slika 7.6. Prikaz promjene normalnih i posmičnih naprezanja u ovisnosti o promjeni unutarnjih sila

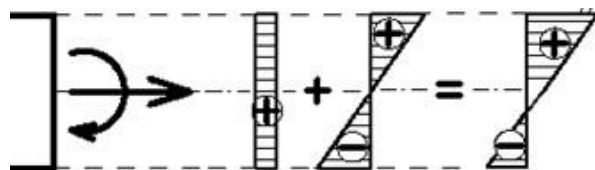
Složeno naprezanje

U slučaju kada istovremeno djeluju uzdužna sila i moment savijanja, razvija se složeno naprezanje. Ukupno (maksimalno) naprezanje određuje se principom superpozicije pojedinih utjecaja sukladno izrazu:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \quad (7.18.)$$

gdje je: σ – normalno naprezanje u presjeku – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; N – uzdužna sila u presjeku; A – površina ili ploština poprečnog presjeka; M – moment savijanja u presjeku; W – moment otpora oko osi oko koje je i savijanje.

Kod ovakvog stanja, nulta linija naprezanja **ne mora prolaziti kroz težište**, već se pomiče prema strani gdje prevladava jedno od naprezanja.



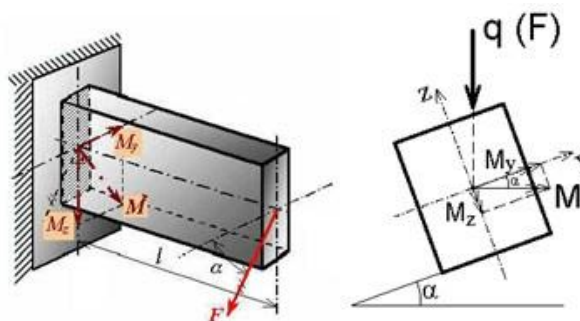
Slika 7.7. Prikaz zbrajanja naprezanja za složeno stanje naprezanja – princip superpozicije

Koso savijanje

Koso savijanje nastaje od opterećenja koje uzrokuje savijanje oko osi koja je postavljena koso u odnosu na glavne osi. Stoga kao posljedica kosog savijanja nastaje savijanje oko obje osi:

$$M_y = M \cdot \cos \alpha \quad M_z = M \cdot \sin \alpha \quad (7.19.)$$

gdje je: M_y i M_z – komponente rastavljenog momenta savijanja oko osi y i z; α – kut koji zatvara moment savijanja s osi y.



Slika 7.8. Prikaz kosog savijanja i rastavljanja momenta savijanja na komponente

Normalno naprezanje kod kosog savijanja iznosi:

$$\sigma = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z} \quad (7.20.)$$

gdje je: σ – normalno naprezanje u presjeku – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; M_y i M_z – komponente rastavljenog momenta savijanja oko osi y i z; W_y i W_z – moment otpora oko osi oko koje je i savijanje.

Izvijanje

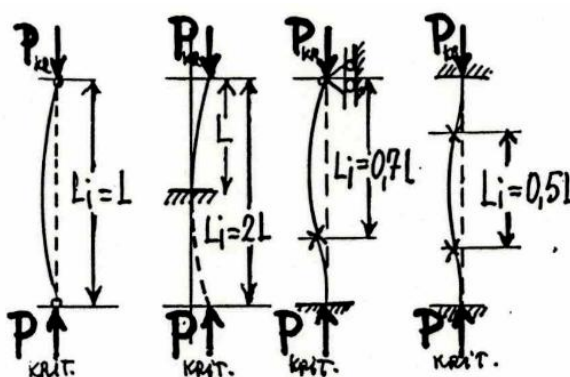
Elementi koji su opterećeni tlačno podložni su gubitku stabilnosti – **izvijanju**. To je oblik bočnog otklona koji se javlja prije nego što presjek dosegne dopuštenu čvrstoću.

Eulerova kritična sila za idealan štap dana je izrazom:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_i^2} \quad (7.21.)$$

gdje je: P_{kr} – Eulerova kritična sila izvijanja kod koje dolazi do gubitka stabilnosti tlačno opterećenog štapa – mjerna jedinica je N ili kN; I – moment tromosti (inercije) oko osi okomite na smjer izvijanja – obično se gleda moment tromosti oko osi koja daje najmanju vrijednost; E – modul elastičnosti koje je svojstvo materijala od kojeg je konstrukcija i određuje se eksperimentalno – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; L_i – slobodna duljina izvijanja, a određuje se sukladno slici 7.7.

Slobodna duljina izvijanja elementa ovisi o rubnim uvjetima, a predstavlja razmak između dviju susjednih točaka infleksije njegove elastične linije izvijanja.



Slika 7.9. Prikaz određivanja slobodne duljine izvijanja ovisno o načinu pridržavanja štapa na krajevima

Eulerova kritična sila za idealan štap često se daje u formi **kritičnog normalnog naprezanja** prema izrazu:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (7.21.)$$

gdje je: σ_{kr} – Eulerovo kritično naprezanje pri kojem dolazi do izvijanja odnosno gubitka stabilnosti tlačno opterećenog štapa – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; E – modul elastičnosti koje je svojstvo materijala od kojeg je konstrukcija i određuje se eksperimentalno – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; λ – vitkost štapa.

Vitkost štapa definirana je kao:

$$\lambda = \frac{L_i}{i_{min}} \quad (7.22.)$$

gdje je: λ – vitkost štapa; L_i – slobodna duljina izvijanja, a određuje se sukladno slici 7.7; i_{min} – minimalna vrijednost polumjera tromosti.

Polumjer tromosti (radijus inercije) određuje se preko izraza:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (7.23.)$$

gdje je: i_y , i_z – polumjer tromosti (radijus inercije) oko osi y, odnosno osi z; I_y , I_z – momenti tromosti presjeka oko osi y, odnosno z; A – površina poprečnog presjeka.

Minimalna vrijednost polumjera tromosti je ona koja prema izrazima 7.23. daje najmanju vrijednost. Uglavnom je ona mjerodavna za kritično naprezanje kod izvijanja.

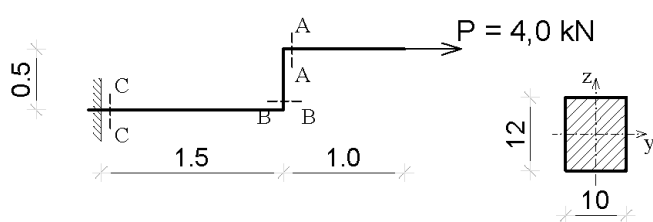
Minimalna vrijednost polumjera tromosti (radijus inercije) pravokutnog presjeka određuje se preko izraza:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot a = 0,289 \cdot a \quad (7.24.)$$

gdje je: i_{min} – minimalni polumjer tromosti (radijus inercije) pravokutnog presjeka; a – manja dimenzija pravokutnog presjeka.

Slijedi prikaz proračuna maksimalnih naprezanja u nekom presjeku i općenito na konstrukciji.

7.2.1. Naprezanja – 1. primjer



U karakterističnim presjecima A, B i C potrebno je odrediti normalna (aksijalna) naprezanja za zadani presjek 10/12 cm.

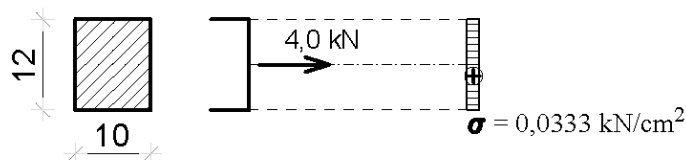
Vlastitu težinu treba zanemariti.

1. Presjek A-A

Presjek je opterećen samo uzdužnom vlačnom silom:

$$N = 4,0 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{4}{10 \cdot 12} = 0,0333 \text{ kN/cm}^2$$



2. Presjek B-B

Presjek je opterećen samo momentom savijanja:

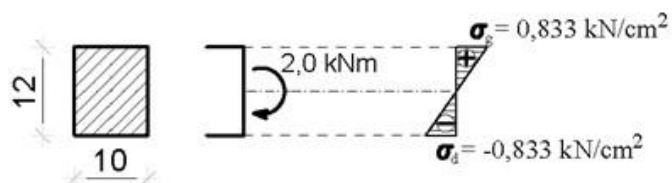
$$M = 2,0 \text{ kNm}$$

Moment otpora pravokutnog presjeka iznosi:

$$W_{1,2} = \frac{10 \cdot 12^2}{6} = 240,0 \text{ cm}^3$$

Normalno naprezanje od savijanja pravokutnog presjeka iznosi:

$$\sigma_{1,2} = \frac{M}{W_{1,2}} = \frac{200}{240} = \pm 0,833 \text{ kN/cm}^2$$



Moment je uvršten u jedinici $kNcm$, kako bi bio u skladu s jedinicom momenta otpora u nazivniku. Pripazimo na orijentaciju momenta koji djeluje na način da uzrokuje rastezanje gornjeg ruba presjeka, odnosno vlačno naprezanje označeno pozitivnim predznakom. Analogno tome donji rub se skraćuje, pa tu nastaje tlačno naprezanje označeno negativnim predznakom.

3. Presjek C-C

Presjek je opterećen momentom savijanja i uzdužnom silom:

$$M = 2,0 kNm$$

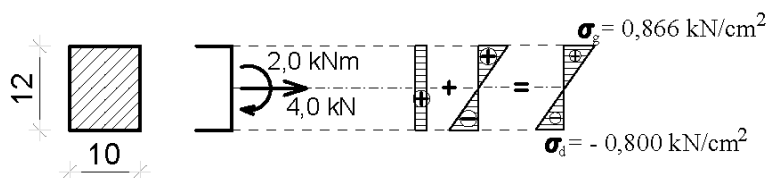
$$N = 4,0 kN$$

Stoga se ovdje radi o složenom stanju naprezanja, pa moramo kombinirati naprezanje od oba utjecaja:

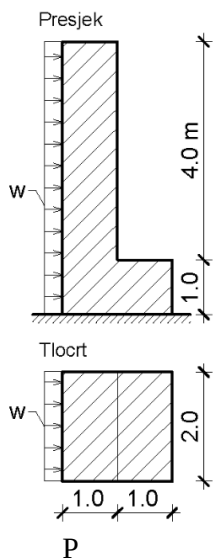
$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_{1,2}} = \frac{4}{10 \cdot 12} \pm \frac{200}{240} = 0,0333 \pm 0,833 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_g = 0,0333 + 0,833 = 0,866 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_d = 0,0333 - 0,833 = -0,800 \text{ kN/cm}^2$$

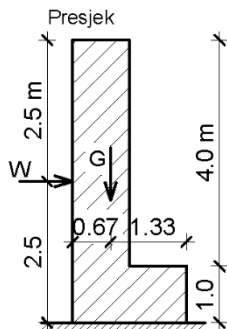


7.2.2. Naprezanja – 2. primjer



Na slobodno položeno tijelo gustoće 400 kg/m^3 djeluje vjetar $w = 0,8 \text{ kN/m}^2$.

Potrebno je izračunati i nacrtati normalna naprezanja u kN/m^2 na kontaktnoj površini tijela i tla.



Najprije zadana opterećenja svedemo na koncentrirane sile. Radi jednostavnijeg izračuna usvajamo da je $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

$$\gamma = 400 \text{ kg/m}^3 = 4000 \text{ N/m}^3 = 4,0 \text{ kN/m}^3$$

$$G = (2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 4) \cdot 4,0 = 48,0 \text{ kN}$$

$$W = (2 \cdot 5) \cdot 0,8 = 8,0 \text{ kN}$$

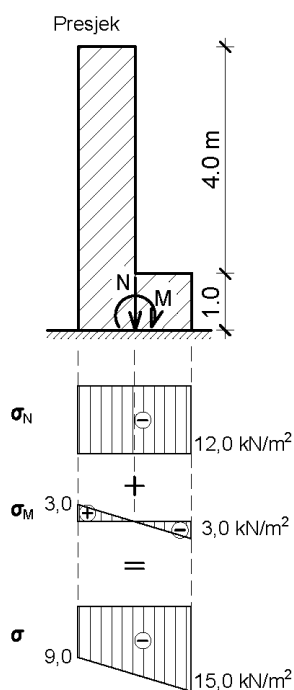
Vlastita težina djeluje u težištu tijela koje je od lijevog ruba udaljeno:

$$x = \frac{2 \cdot 5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1 \cdot 1,5}{12} = \frac{5 + 3}{12} = \frac{2}{3} = 0,667 \text{ m}$$

Opterećenje od dobivenih sila na kontaktnoj površini tijela i tla iznosi:

$$N = G = 48,0 \text{ kN}$$

$$M = W \cdot 2,5 - G \cdot \frac{1}{3} = 8 \cdot 2,5 - 48 \cdot \frac{1}{3} = 4,0 \text{ kNm}$$



Stoga normalno naprezanje od uzdužne (vertikalne) sile iznosi:

$$\sigma^N = \frac{-N}{A} = \frac{-48}{2 \cdot 2} = -12,0 \text{ kN/cm}^2$$

Normalno naprezanje od savijanja iznosi:

$$\sigma_{1,2}^M = \frac{M}{W_{1,2}} = \frac{4}{\frac{2 \cdot 2^2}{6}} = \pm 3,0 \text{ kN/cm}^2$$

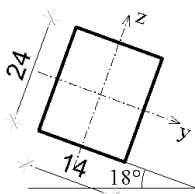
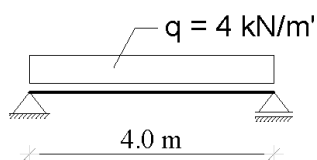
Kako se ovdje radi o složenom stanju naprezanja, moramo kombinirati naprezanje od oba utjecaja:

$$\sigma_{1,2} = \sigma^N \pm \sigma_{1,2}^M = -12,0 \pm 3,0$$

$$\sigma_1 = -12 + 3,0 = -9,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = -12 - 3,0 = -15,0 \text{ kN/cm}^2$$

7.2.3. Naprezanja – 3. primjer



Za zadani koso položen presjek dimenzija 14/24 cm potrebno je odrediti najveće normalno naprezanje u najopterećenijem presjeku.

Kako se radi o jednostavnoj gredi opterećenoj kontinuiranim opterećenjem, najveći moment savijanja nalazi se na sredini raspona i iznosi:

$$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{4 \cdot 4,0^2}{8} = 8,0 \text{ kNm.}$$

Dobiveni moment rastavlja se na moment oko osi y i moment oko osi z:

$$M_y = M \cdot \cos \alpha = 8,0 \cdot \cos 18^\circ = 7,61 \text{ kNm}$$

$$M_z = M \cdot \sin \alpha = 8,0 \cdot \sin 18^\circ = 2,47 \text{ kNm}$$

Pripadajući momenti otpora oko osi y i z iznose:

$$W_y = \frac{14 \cdot 24^2}{6} = 1344 \text{ cm}^3$$

$$W_z = \frac{24 \cdot 14^2}{6} = 784 \text{ cm}^3$$

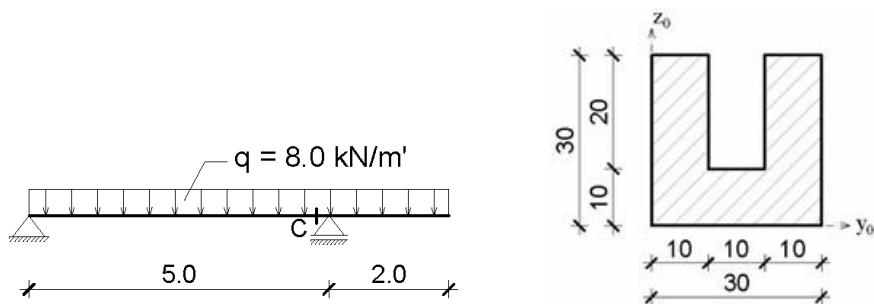
Stoga je najveće normalno naprezanje na donjem uglu presjeka jednako:

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{761}{1344} + \frac{247}{784} = 0,88 \text{ kN/cm}^2$$

Moment je uvršten u jedinici kNcm , kako bi bio u skladu s jedinicom momenta otpora u nazivniku.

7.2.4. Naprezanja – 4. primjer

U presjeku C zadane grede treba odrediti i nacrtati dijagrame normalnih i posmičnih naprezanja za prikazani presjek.



Najprije izračunamo reakcije.

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot 5 - q \cdot 7 \cdot 3,5 = 0 \rightarrow R_B = \frac{8 \cdot 7 \cdot 3,5}{5} = 39,2 \text{ kN}$$

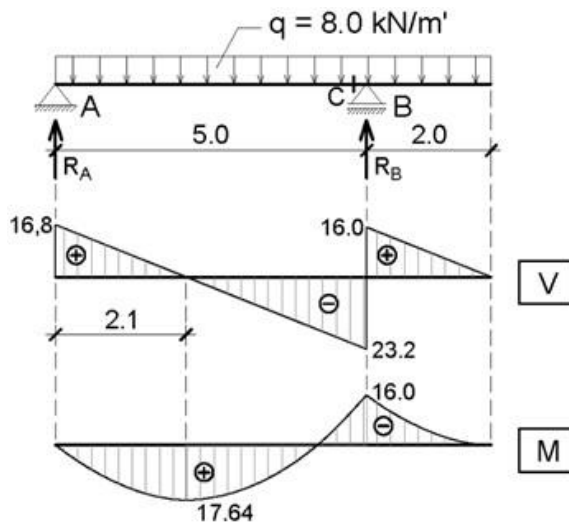
$$\sum M_B = 0$$

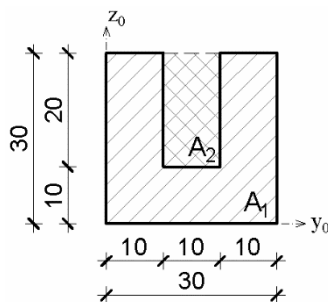
$$q \cdot 7 \cdot 1,5 - R_A \cdot 5 = 0 \rightarrow R_A = \frac{8 \cdot 7 \cdot 1,5}{5} = 16,8 \text{ kN}$$

Zatim nacrtamo dijagrame unutarnjih sila i odredimo unutarnje sile u presjeku C.

$$V_C = 23,2 \text{ kN (zanemaren negativan predznak)}$$

$$M_C = -16,0 \text{ kNm}$$





Zatim određujemo geometrijska svojstva zadanog presjeka, koja su nam potrebna za daljnji rad.

Kako bismo odredili površinu i položaj težišta, podijelimo zadani presjek na jednostavne pravokutnike, na način da od veće površine A_1 oduzmemo manju površinu A_2 .

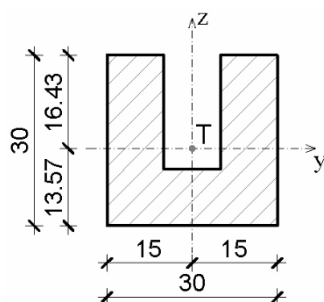
$$A_{uk} = A_1 - A_2 = 30 \cdot 30 - 30 \cdot 30 = 700 \text{ cm}^2$$

Zatim određujemo poziciju težišta po z osi.

$$z_t = \frac{A_1 \cdot 15 - A_2 \cdot 20}{A_{uk}} = \frac{30 \cdot 30 \cdot 15 - 30 \cdot 30 \cdot 20}{700} = 13,57 \text{ cm}$$

Kada smo odredili poziciju težišta, dalje sve računamo oko težišne osi y .

Moment inercije oko težišne osi y određujemo kao razliku momenata inercije površine A_1 i površine A_2 .



$$I_y = \left[\frac{30 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 30 \cdot (15 - 13,57)^2 \right] - \left[\frac{10 \cdot 20^3}{12} + 10 \cdot 20 \cdot (20 - 13,57)^2 \right] = 54404,76 \text{ cm}^4$$

Momenti otpora oko osi y iznose:

$$W_{y,d} = \frac{I_y}{z_t} = \frac{54404,76}{13,57} = 4009,19 \text{ cm}^3$$

$$W_{y,g} = \frac{I_y}{30 - z_t} = \frac{54404,76}{16,43} = 3311,31 \text{ cm}^3$$

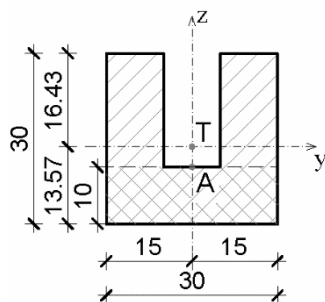
Normalna naprezanja u donjem i gornjem rubu presjeka iznose:

$$\sigma_d = \frac{M_c}{W_{y,d}} = \frac{1600}{4009,19} = -0,399 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_g = \frac{M_c}{W_{y,g}} = \frac{1600}{3311,31} = 0,483 \text{ kN/cm}^2$$

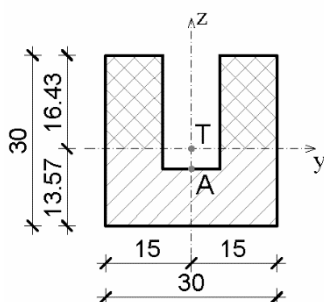
Predznake normalnih naprezanja određujemo temeljem deformacijske linije, odnosno pozicije momentnog dijagrama. Kako je u presjeku C momentni dijagram s gornje strane, vlačno naprezanje u presjeku također mora biti s gornje strane. Analogno tome, tlačno naprezanje mora biti s donje strane presjeka.

Zatim određujemo posmična naprezanja u težištu presjeka i u točki A gdje se mijenja širina presjeka. Da bismo izračunali posmična naprezanja, nedostaju nam vrijednosti statičkih momenata oko osi y u navedenim točkama.



Statički moment u točki A određujemo za površinu ispod te točke kao umnožak površine s udaljenošću od težišta te površine do težišta ukupnog presjeka.

$$S_{y,A} = 30 \cdot 10 \cdot (13,57 - 5) = 2571 \text{ cm}^3$$



Statički moment u težištu presjeka određujemo za površinu ispod ili iznad težišne osi y . Kako je tako jednostavnije, računamo statički moment površine iznad težišta. Vrijednost statičkog momenta je najveća u težištu presjeka, pa tu vrijednost označavamo indeksom *max*.

$$S_{y,max} = 2 \cdot 10 \cdot 16,43 \cdot \left(\frac{16,43}{2}\right) = 2699,45 \text{ cm}^3$$

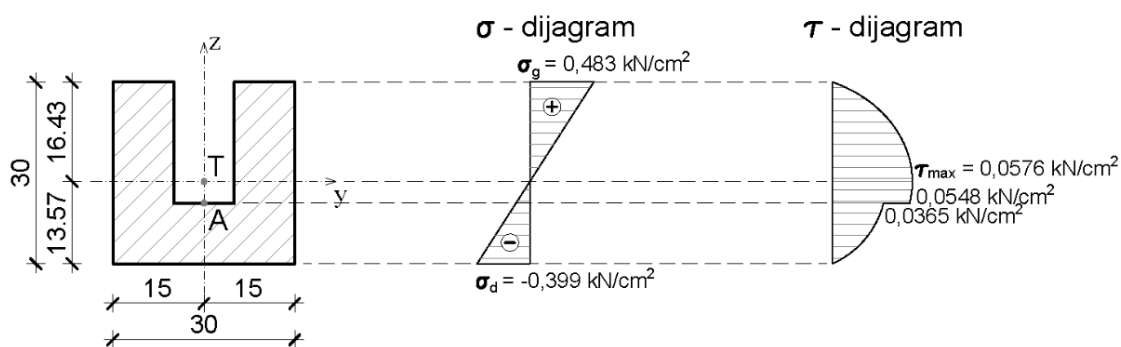
Sada imamo sve vrijednosti potrebne za izračun posmičnih naprezanja. Kako se u točki A mijenja širina presjeka, moramo izračunati vrijednost iznad (g) i ispod (d):

$$\tau_{A,d} = \frac{V_C \cdot S_{y,A}}{I_y \cdot b_d} = \frac{23,2 \cdot 2571}{54404,76 \cdot 30} = 0,0365 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{A,g} = \frac{V_C \cdot S_{y,A}}{I_y \cdot b_g} = \frac{23,2 \cdot 2571}{54404,76 \cdot 20} = 0,0548 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{V_C \cdot S_{y,max}}{I_y \cdot b} = \frac{23,2 \cdot 2699,45}{54404,76 \cdot 20} = 0,0576 \text{ kN/cm}^2$$

Na kraju prikazemo dobivene vrijednosti u dijagramima naprezanja.



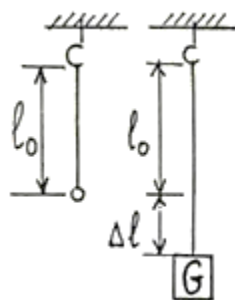
7.3. Deformacije

Pod djelovanjem opterećenja, konstrukcijski elementi doživljavaju **deformacije** – promjene oblika ili dimenzija. U statičkim proračunima najčešće nas zanima **promjena duljine** elementa pod djelovanjem uzdužne sile ili zakrivljenje grede uslijed savijanja.

Uzdužno produljenje

Promjena duljine štapa pod djelovanjem uzdužne sile naziva se **uzdužna deformacija** ili **dilatacija**. Razlikujemo:

- **apsolutno produljenje** (Δl) – iznos promjene duljine
- **relativno produljenje** (ε) – promjena duljine u odnosu na izvornu duljinu.



Slika 7.8. Prikaz izduljenja štapa uslijed uzdužnog opterećenja

Odnos između njih:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.25.)$$

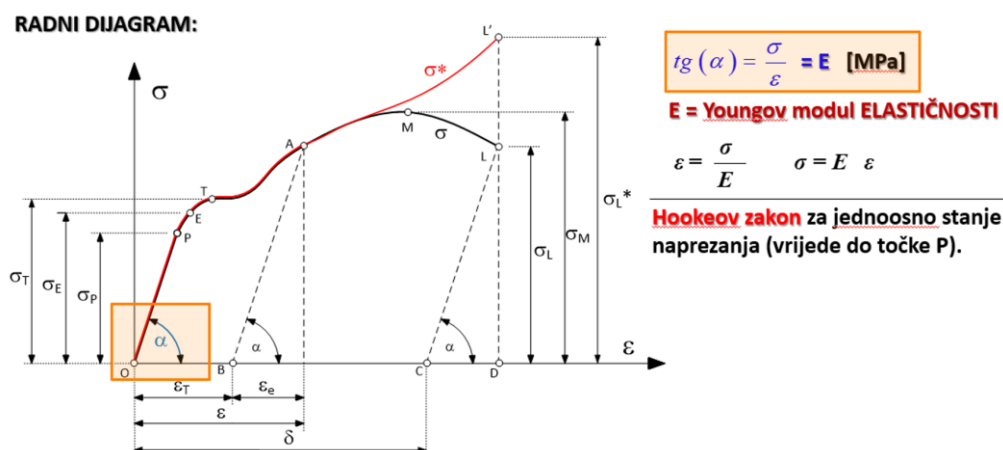
gdje je ε – relativna deformacija – nema jedinice, a često se izražava u postotcima i promilima; Δl – izduljenje štapa uslijed djelovanja opterećenja; l_0 – početna duljina štapa.

Godine **1676. Robert Hooke** postavio je zakon koji povezuje naprezanje i deformaciju:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (7.26.)$$

gdje je σ – normalno naprezanje u presjeku – mjerna jedinica je MPa ili N/mm²; ε – relativna deformacija – nema jedinice, a često se izražava u postotcima i promilima; E – modul elastičnosti koji je svojstvo materijala od kojeg je konstrukcija i određuje se eksperimentalno – mjerna jedinica je MPa ili N/mm².

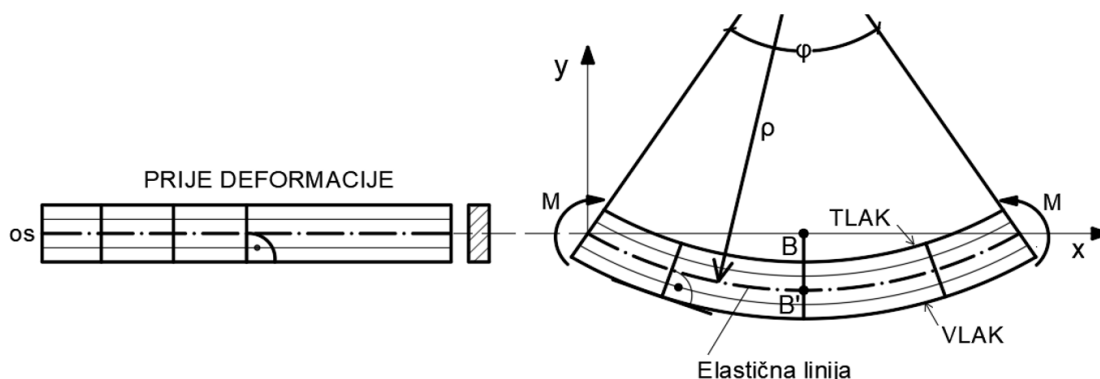
Hookeov zakon kaže da je **normalno naprezanje proporcionalno relativnoj deformaciji**, a omjer tih dviju vrijednosti naziva se: **modul elastičnosti** ili **Youngov modul** (izražava krutost materijala).



Slika 7.9. Radni dijagram čelika s prikazom odnosa naprezanja i relativne deformacije

Deformacije savijanjem – metoda virtualnog rada

Usljed savijanja nekog štapa, tj. opterećenja momentom savijanja dolazi do krivljenja uzdužne osi.



Slika 7.10. Prikaz deformiranja štapa izloženog momentu savijanja na krajevima

Za proračun deformacija savijanjem koristimo se **metodom virtualnog rada**, temeljenom na definiciji rada kao umnoška sile i puta. Ova metoda omogućuje izračun progiba u točno određenoj točki grede.

Za nosač konstantne krutosti (EI), ravne osi i nelomljenog toka momenta, deformacija (progib) u zadanoj točki iznosi:

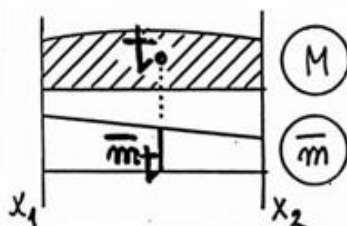
$$y = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\bar{m}M}{EI} dx \quad (7.27.)$$

gdje je $\bar{m}$ – moment savijanja od virtualne sile; M – moment savijanja od vanjskih sila; E – modul elastičnosti koji je svojstvo materijala; I – moment tromosti.

Ako izlučimo $1/EI$, preostali integral se može izračunati kao produkt površine momentnog dijagrama M i vrijednosti momenta $\bar{m}$ nad težištem površine M , pa se izraz 7.27. pojednostavljuje u diskretni oblik:

$$y = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \bar{m}_i \cdot \Phi_i \quad (7.28.)$$

gdje je $\bar{m}_i$ – vrijednost momenta od virtualne sile nad težištem promatrane površine momentnog dijagrama; Φ_i – površina dijagrama momenta M .

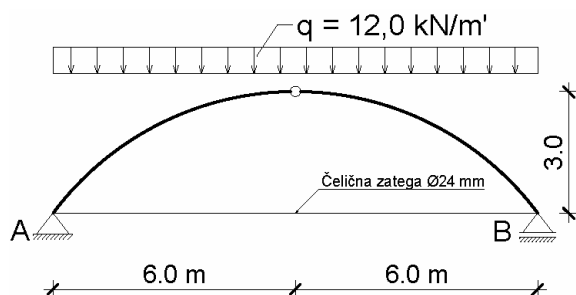


Slika 7.11. Shematski prikaz proračuna deformacije virtualnim radom

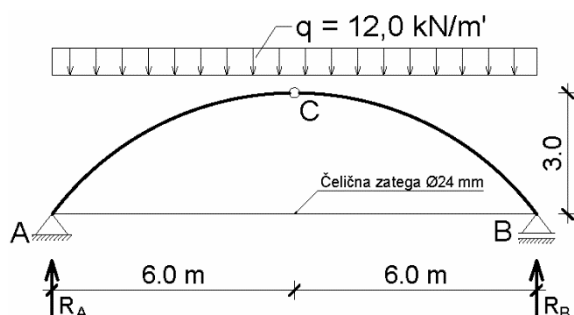
Ovi izrazi omogućuju pouzdanu procjenu deformacija nosivih elemenata te su važan dio analize upotrebljivosti konstrukcija (npr. ograničavanje progiba u stropovima, mostovima, konzolama itd.).

Slijedi prikaz proračuna deformacije konstrukcijskih elemenata pomoću dvaju primjera.

7.3.1. Deformacije – 1. primjer



Treba odrediti normalno naprezanje u čeličnoj zatezi presjeka Ø24mm i izračunati horizontalni pomak točke B, ako je modul elastičnosti zatege $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$.



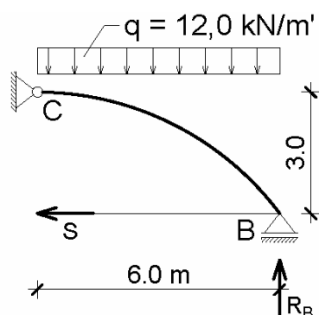
Najprije izračunamo reakcije.

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot 12 - q \cdot 12 \cdot 6 = 0 \rightarrow R_B = 72,0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \cdot 12 - q \cdot 12 \cdot 6 = 0 \rightarrow R_A = 72,0 \text{ kN}$$



Kako bismo izračunali silu u zatezi, koja je po definiciji unutarnja sila, potrebno je sustav rastaviti i analizirati samo jednu stranu.

$$\sum M_C^d = 0$$

$$R_B \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - S \cdot 3 = 0 \rightarrow S = 72,0 \text{ kN}$$

Normalno naprezanje u zatezi iznosi:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{S}{r^2 \pi} = \frac{72,0}{1,2^2 \cdot \pi} = 15,92 \text{ kN/cm}^2$$

Primjenom Hookeova zakona dobijemo relativno produljenje zatege:

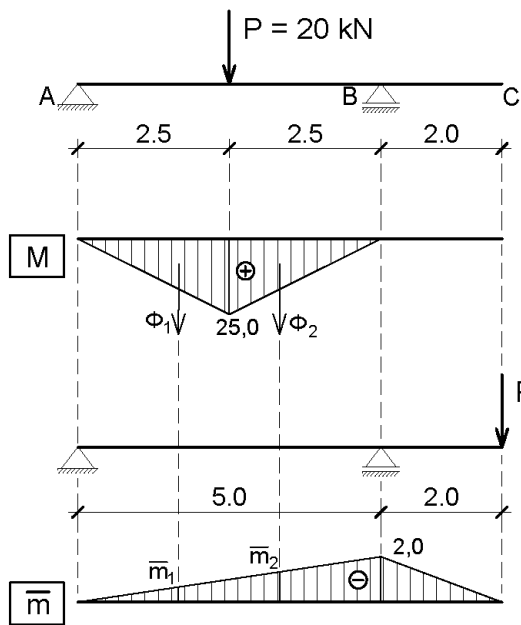
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{15,92}{21000} = 0,000758$$

pa apsolutno produljenje zatege iznosi:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \rightarrow \Delta L = \varepsilon \cdot L = 0,000758 \cdot 1200 = 0,91 \text{ cm}$$

Dakle, točka B će se pomaknuti za 9,1 mm udesno.

7.3.2. Deformacije – 2. primjer



Treba odrediti vertikalnu deformaciju (progib) točke C na zadanom sustavu, ako je $EI = 10000 \text{ kNm}$.

$$\sum M_B = 0$$

$$P \cdot 2,5 - A \cdot 5 = 0 \rightarrow A = 10,0 \text{ kN}$$

$$M = 10,0 \cdot 2,5 = 25,0 \text{ kNm}$$

$$\bar{m} = 1,0 \cdot 2,0 = 2,0 \text{ kNm}$$

Deformaciju od savijanja izračunavamo pomoću izraza:

$$y = \frac{1}{EI} (\bar{m}_1 \cdot \Phi_1 + \bar{m}_2 \cdot \Phi_2)$$

Vrijednosti površina momentnog dijagrama Φ_i i momenata $\bar{m}$ iznose:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{2,5 \cdot 25}{2} = 31,25$$

$$\bar{m}_1 = \frac{\frac{2}{3} \cdot 2,5}{5,0} \cdot (-2,0) = -0,667$$

$$\bar{m}_2 = \frac{2,5 + \frac{1}{3} \cdot 2,5}{5,0} \cdot (-2,0) = -1,333$$

pa je vertikalna deformacija točke C jednaka:

$$y = \frac{1}{EI} (-0,667 \cdot 31,25 - 1,333 \cdot 31,25) = \frac{1}{EI} \cdot (-62,5) \text{ m}$$

Kada uvrstimo zadanu krutost na savijanje, deformacija iznosi:

$$y = \frac{-62,5}{10000} = -0,00625 \text{ m} = -6,25 \text{ mm}$$

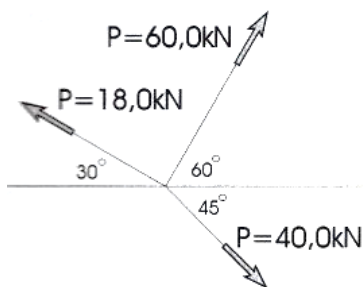
Dakle, točka C se pomakne prema gore za 6,25 mm.

8. Zadatci za vježbu

8.1. Sustav sila u ravnini

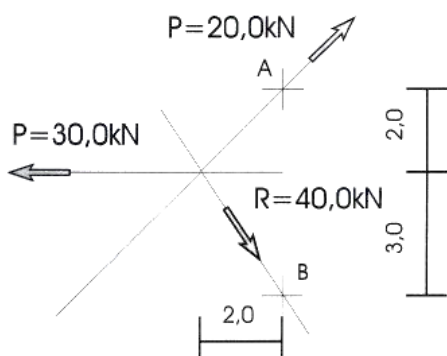
8.1.1. 1. zadatak

Odredite rezultantu zadanog sustava sila:



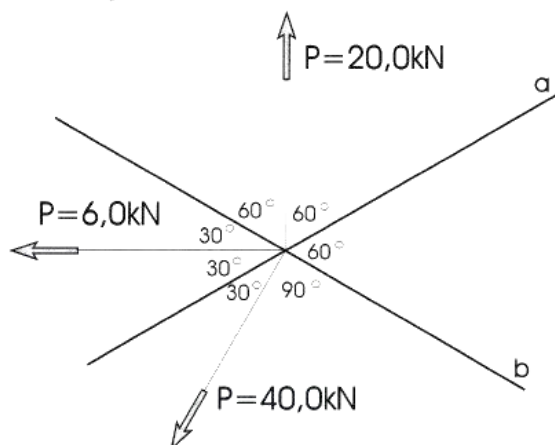
8.1.2. 2. zadatak

Odredite silu S koja sa zadanim silama ima rezultantu $R = 40,0$ kN:



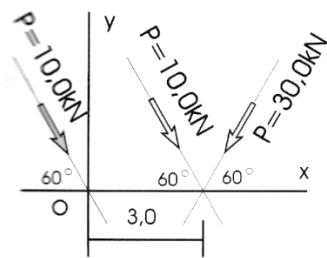
8.1.3. 3. zadatak

Zamijenite zadani sustav sila, silama na pravcima a i b :



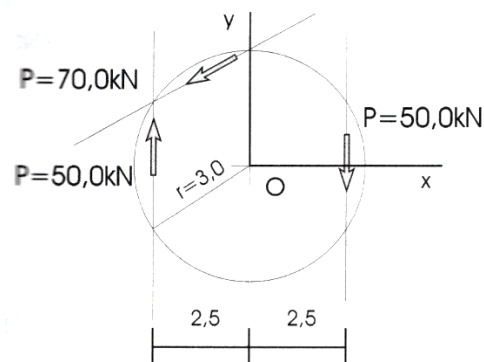
8.1.4. 4. zadatak

Odredite rezultantu zadanog sustava sila:



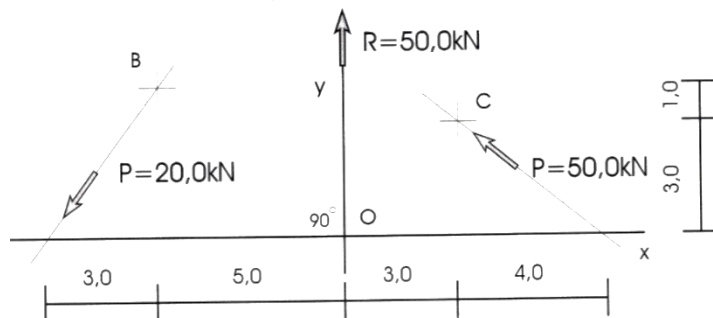
8.1.5. 5. zadatak

3. Odredite rezultantu zadanog sustava sila:



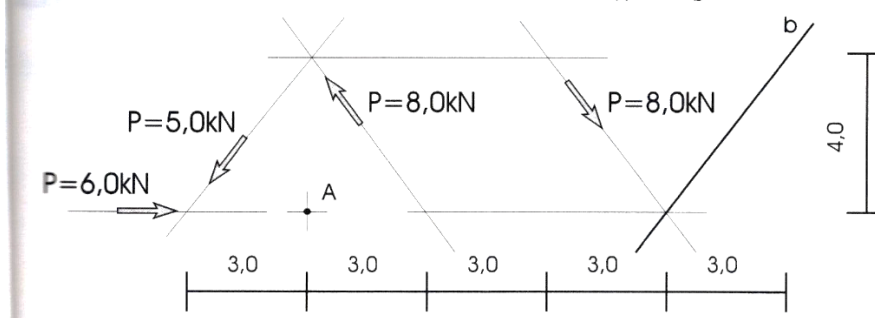
8.1.6. 6. zadatak

Odredite silu S koja sa zadanim silama ima rezultantu $R=50,0\text{kN}$:



8.1.7. 7. zadatak

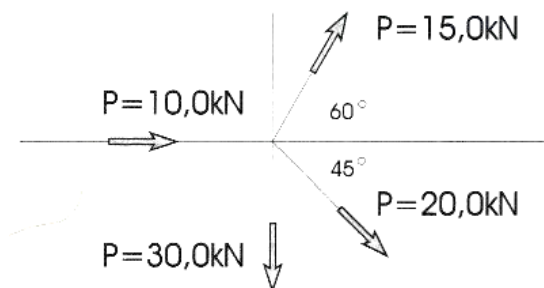
2.12. Zadani sustav sila rastavite na sile S_A i S_b :



8.2. Ravnoteža sustava

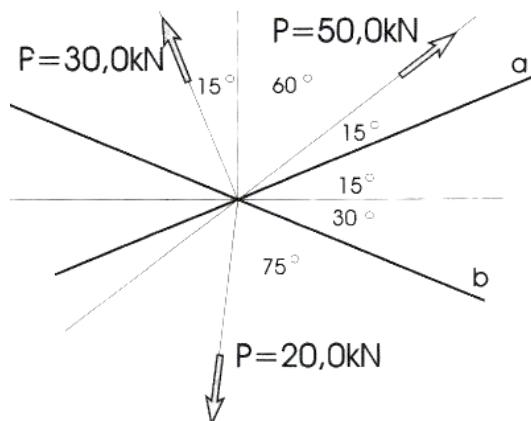
8.2.1. 1. zadatak

12. Uravnotežite zadani sustav sila:



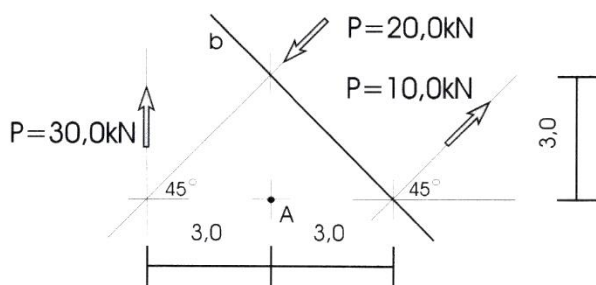
8.2.2. 2. zadatak

Uravnotežite zadani sustav sila, silama na pravcima a i b:



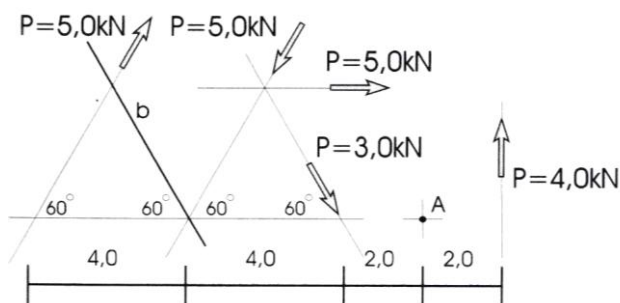
8.2.3. 3. zadatak

16. Zadani sustav sila uravnotežite silama S_A i S_b :



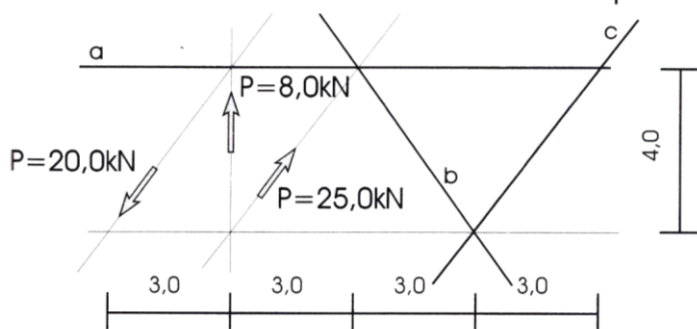
8.2.4. 4. zadatak

7. Zadani sustav sila uravnotežite silama S_A i S_B :



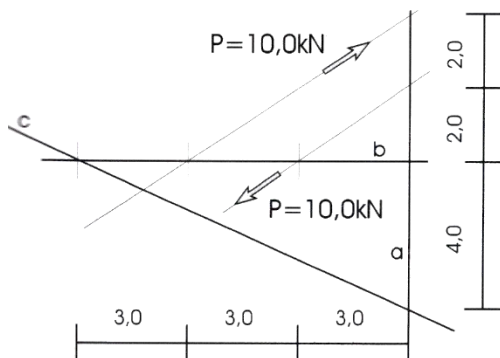
8.2.5. 5. zadatak

5. Zadani sustav sila rastavite na sile na pravcima a, b, i c:



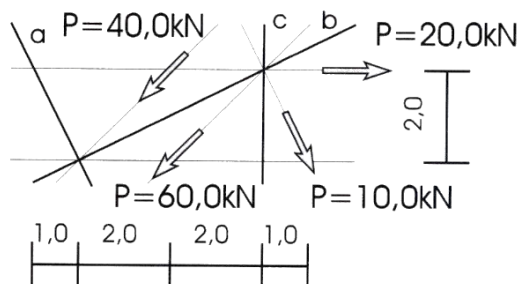
8.2.6. 6. zadatak

26. Zadani sustav sila rastavite na sile na pravcima a, b, i c:



8.2.7. 7. zadatak

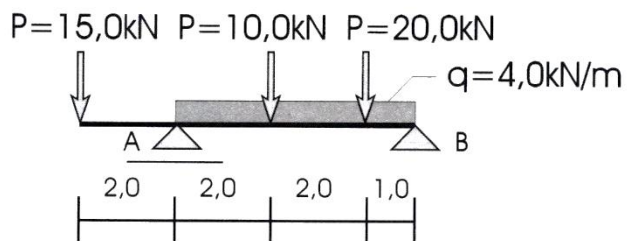
Zadani sustav sila uravnotežite silama na pravcima a, b, i c:



8.3. Ravnoteža krutog tijela u ravni

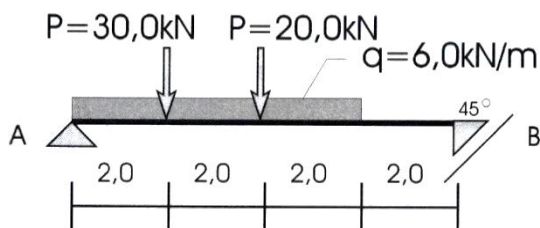
8.3.1. 1. zadatak

Odredite reakcije.



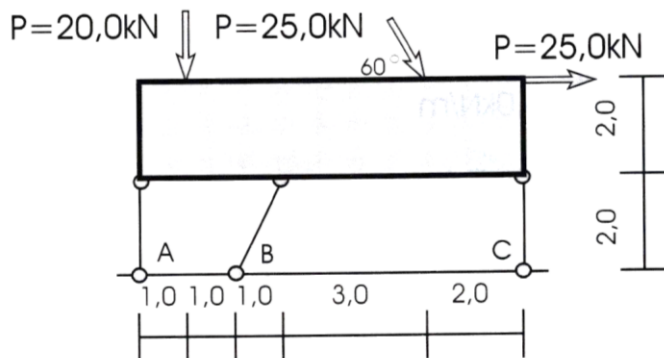
8.3.2. 2. zadatak

Odredite reakcije.



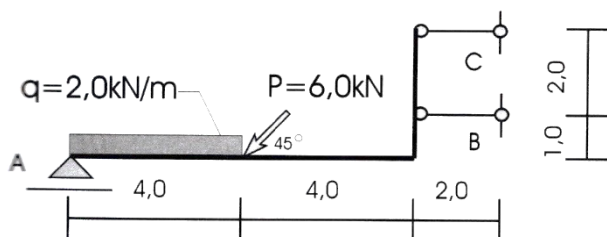
8.3.3. 3. zadatak

Odredite reakcije.



8.3.4. 4. zadatak

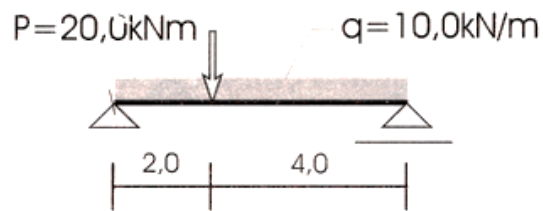
Odredite reakcije.



8.4. Unutarnje sile

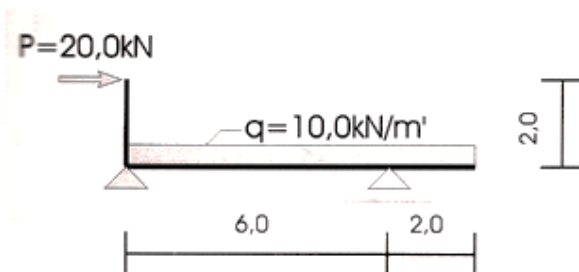
8.4.1. 1. zadatak

Odredite dijagram unutarnjih sila.



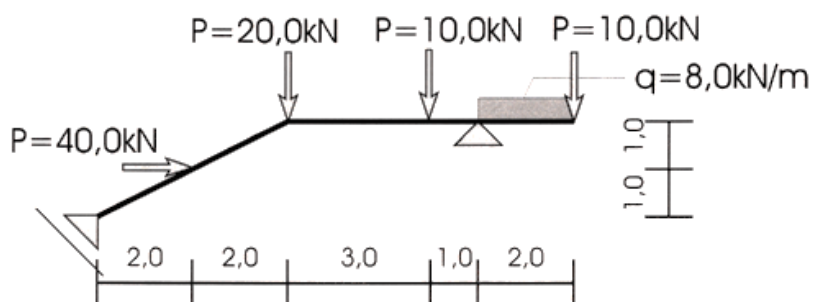
8.4.2. 2. zadatak

Odredite dijagram unutarnjih sila.



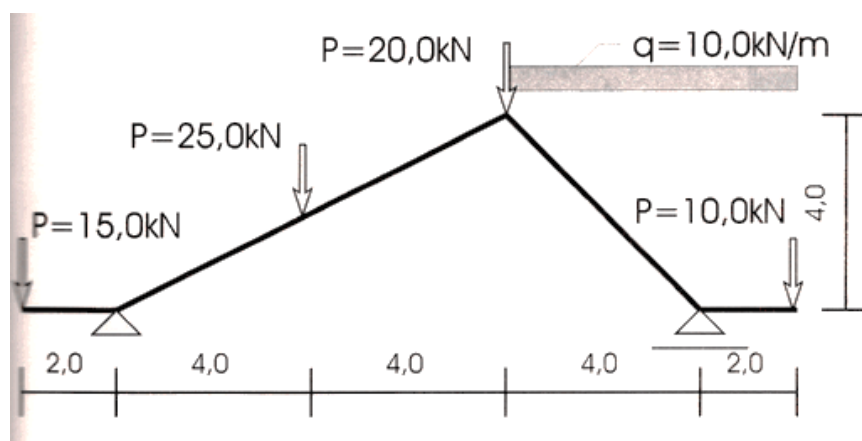
8.4.3. 3. zadatak

Odredite dijagram unutarnjih sila.



8.4.4. 4. zadatak

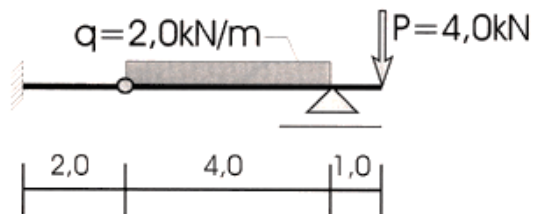
Odredite dijagram unutarnjih sila.



8.5. Konstrukcijski sustavi

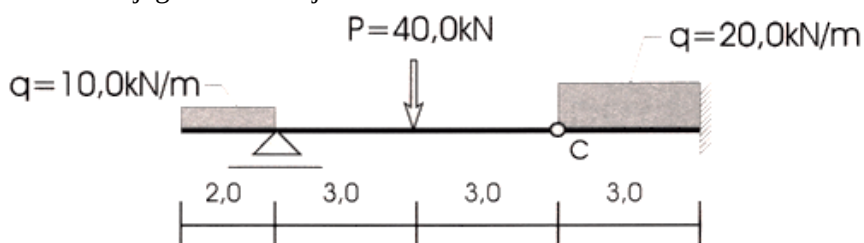
8.5.1. 1. zadatak

Odredite dijagram unutarnjih sila.



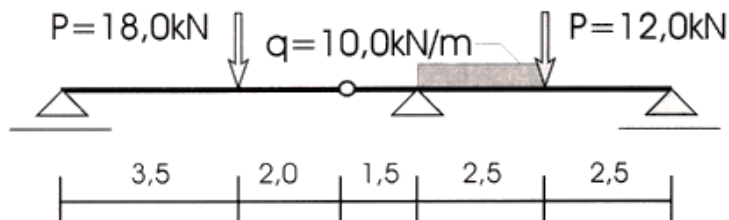
8.5.2. 2. zadatak

Odredite dijagram unutarnjih sila.



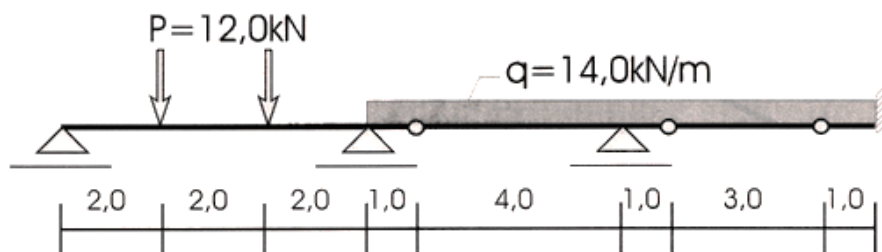
8.5.3. 3. zadatak

Odredite dijagram unutarnjih sila.



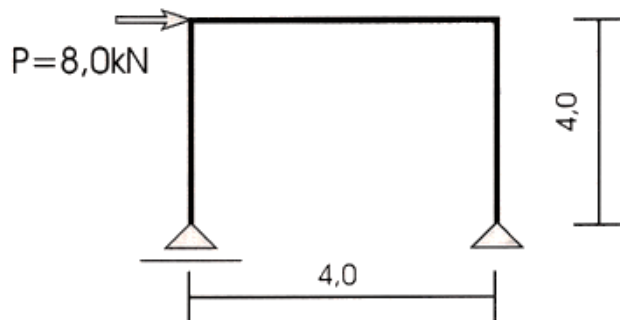
8.5.4. 4. zadatak

Odredite dijagram unutarnjih sila.

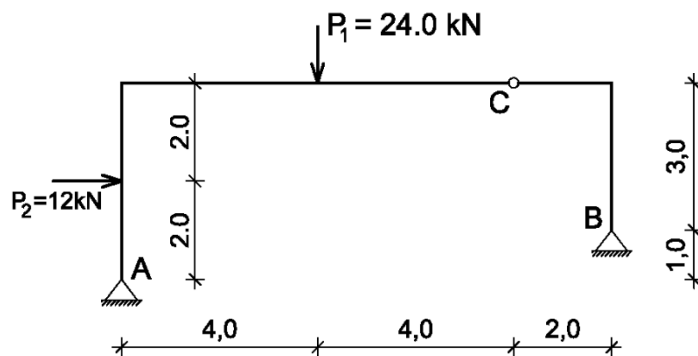


8.5.5. 5. zadatak

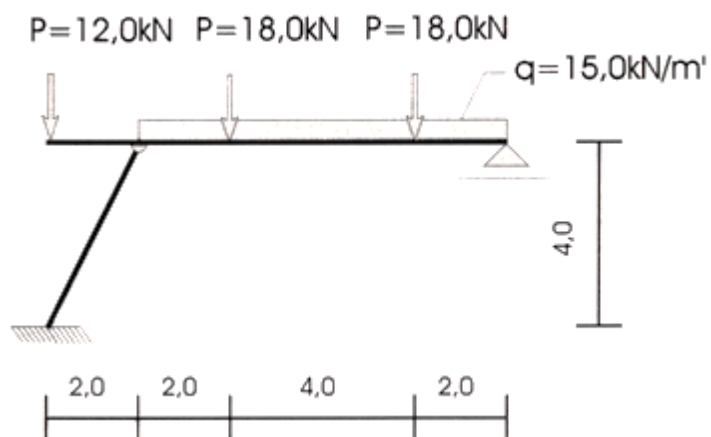
Odredite dijagram unutarnjih sila.

**8.5.6. 6. zadatak**

Odredite dijagram unutarnjih sila.

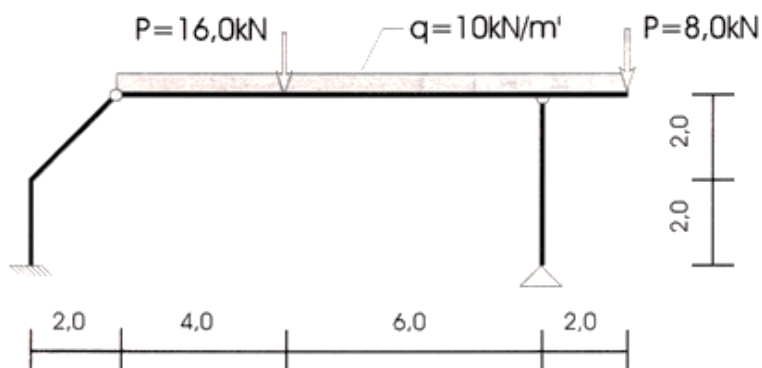
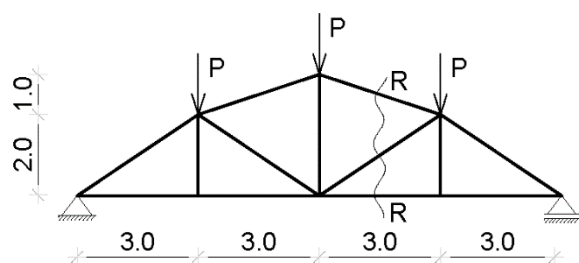
**8.5.7. 7. zadatak**

Odredite dijagram unutarnjih sila.

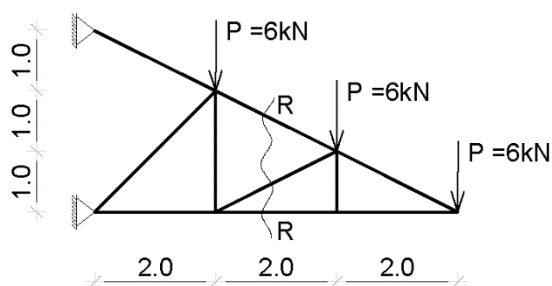


8.5.8. 8. zadatak

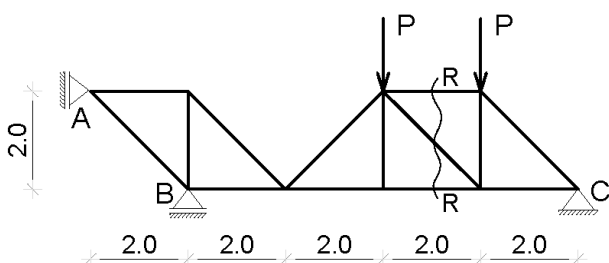
Odredite dijagram unutarnjih sila.

**8.5.9. 9. zadatak**

$P = 8 \text{ kN}$
Ritterovom metodom
odrediti sile u štapovima
označenim presjekom R-R.

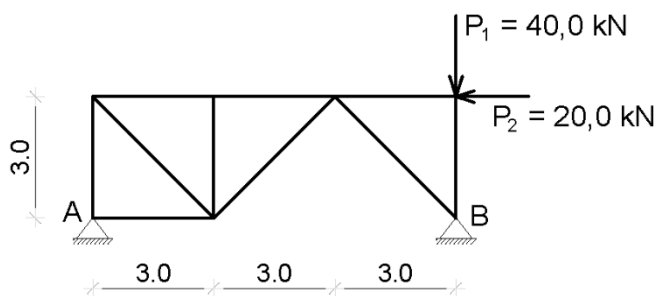
8.5.10. 10. zadatak

Grafičkom metodom odrediti
reakcije, pa grafičkom
metodom presjeka odrediti
sile u štapovima označenim
presjekom R-R.

8.5.11. 11. zadatak

$P = 20 \text{ kN}$
Grafičkom metodom
presjeka odrediti sile u
štapovima označenim
presjekom R-R.
Označiti štap u kojem je
sila jednaka nuli.

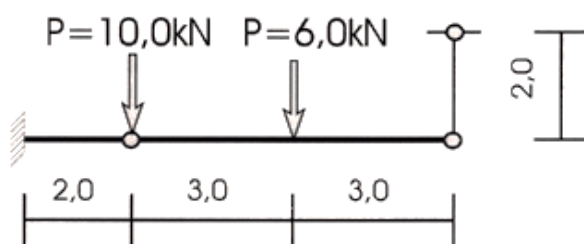
8.5.12. 12. zadatak



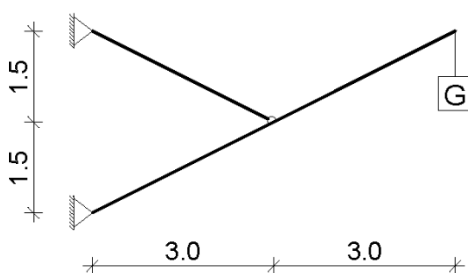
Metodom Cremona
odrediti sile u svim
štapovima.

8.5.13. 13. zadatak

Odredite dijagram unutarnjih sila.

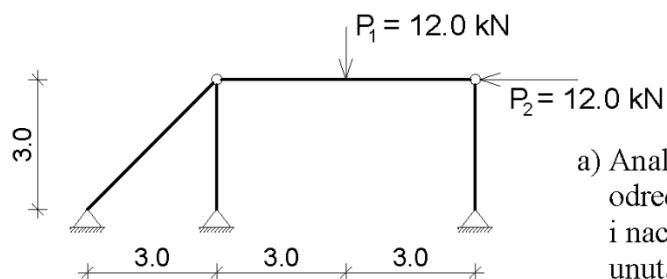


8.5.14 14. zadatak



Grafičkom metodom
odrediti reakcije.
Dijagrame
unutarnjih sila
nacrtati kvalitativno.

8.5.15. 15. zadatak

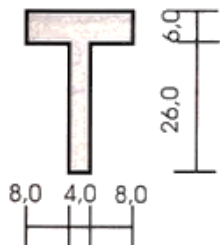


- Analitičkom metodom
odrediti reakcije, te odrediti
i nacrtati dijagrame
unutarnjih sila.
- Provjeriti reakcije
grafičkom metodom

8.6. Geometrijska svojstva ploha, naprezanja i deformacije

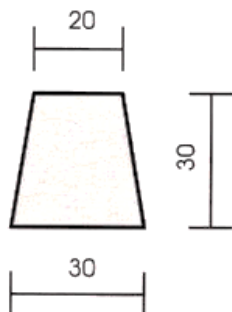
8.6.1. 1. zadatak

Odredite površinu poprečnog presjeka, težište i moment tromosti u odnosu na težište.



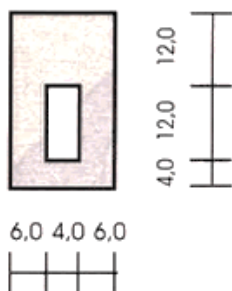
8.6.2. 2. zadatak

Odredite površinu poprečnog presjeka, težište i moment tromosti u odnosu na težište.



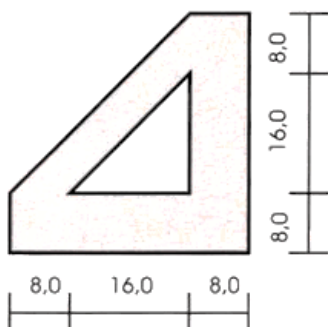
8.6.3. 3. zadatak

Odredite površinu poprečnog presjeka, težište i moment tromosti u odnosu na težište.



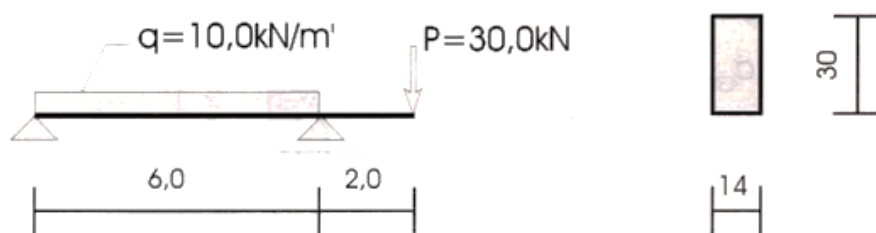
8.6.4. 4. zadatak

Odredite površinu poprečnog presjeka, težište i moment tromosti u odnosu na težište.

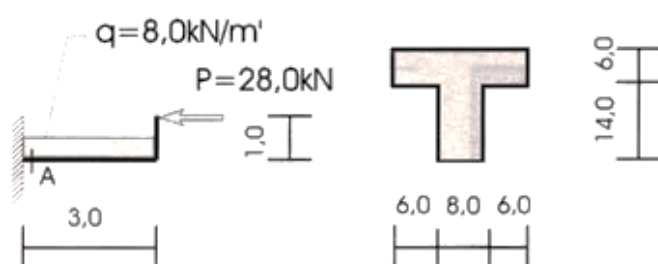


8.6.5. 5. zadatak

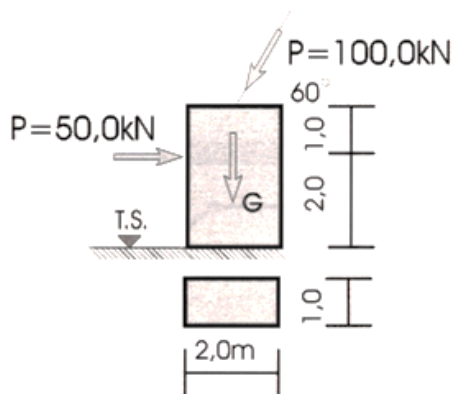
Odredite i nacrtajte dijagrame normalnih i posmičnih naprežanja u najopterećenijem presjeku zadanog sustava.

**8.6.6. 6. zadatak**

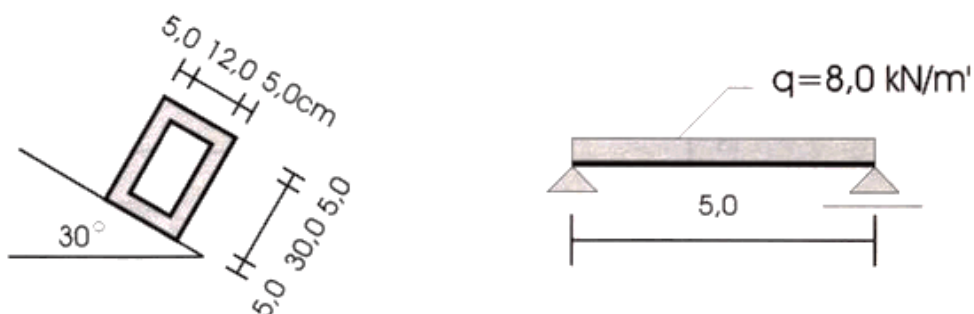
Odredite i nacrtajte dijagrame normalnih i posmičnih naprežanja u presjeku A zadanog sustava.

**8.6.7. 7. zadatak**

Odredite i nacrtajte dijagram normalnih naprežanja u nivou temeljnog sloja, ako je $G = 150 \text{ kN}$.

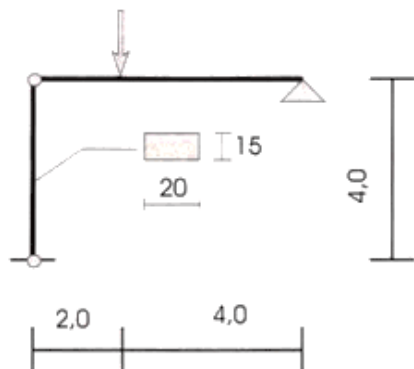
**8.6.8. 8. zadatak**

Odredite najveće normalno naprežanje u najopterećenijem presjeku zadanog sustava.

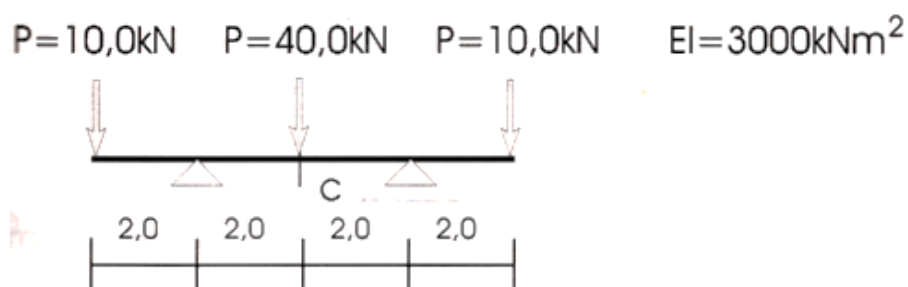


8.6.9. 9. zadatak

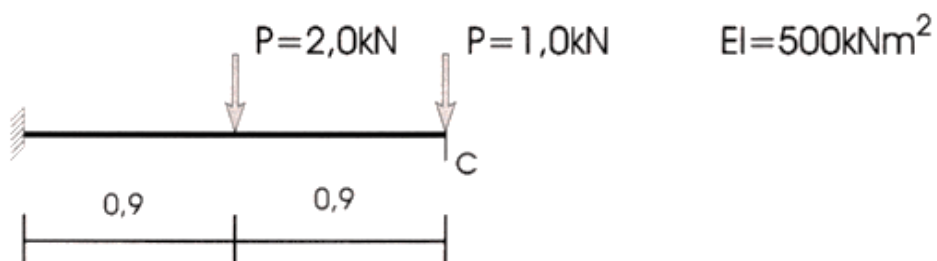
Odredite vertikalni pomak vrha stupa ako je greda opterećena silom $P = 12,0 \text{ kN}$, a modul elastičnosti materijala od kojeg je izveden stup iznosi $E = 10000 \text{ N/mm}^2$.

**8.6.10. 10. zadatak**

Odredite progib (vertikalnu deformaciju) u presjeku C.

**8.6.11. 11. zadatak**

Odredite progib (vertikalnu deformaciju) u presjeku C.



9. Literatura

1. Diklić, D. (2004.) *Tehnička mehanika I.* skripta Arhitektonskog fakulteta. Zagreb
2. Diklić, D. (2004.) *Tehnička mehanika II.* skripta Arhitektonskog fakulteta. Zagreb
3. Galić, J. (2022.) *Betonske konstrukcije.* Sveučilište u Zagrebu, Arhitektonski fakultet. Zagreb.
4. Medić, B. (1995.) *Mehanika 1.* UPI-2M. Zagreb.
5. Medić, B. (1995.) *Mehanika 2.* UPI-2M. Zagreb.
6. Mihanović, A., Trogrlić, B. (2011.) *Građevna statika I.* Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije Sveučilišta u Splitu. Split.
7. Salvadori, M. (1995.) *Nosive konstrukcije u arhitekturi.* UPI-2M. Zagreb.
8. Simović, V. (1988.) *Građevna statika I.* Građevinski institut Zagreb. Zagreb.
9. Šimić, V. (2002.) *Otpornost materijala I.* Sveučilišna naklada. Sveučilište u Zagrebu – Građevinski fakultet. Školska knjiga. Zagreb.
10. HRN EN 1991-1-1:2012. Eurokod 1. *Djelovanja na konstrukcije -- Dio 1-1: Opća djelovanja - Obujamske težine, vlastite težine i uporabna opterećenja zgrada (EN 1991-1-1:2002+AC:2009) + nacionalni dodatak.*
11. HRN EN 1991-1-2:2012. Eurokod 1. *Djelovanja na konstrukcije -- Dio 1-2: Opća djelovanja - Djelovanja na konstrukcije izložene požaru (EN 1991-1-2:2002+AC:2009) + nacionalni dodatak.*
12. HRN EN 1991-1-3:2012. Eurokod 1. *Djelovanja na konstrukcije -- Dio 1-3: Opća djelovanja - Opterećenja snijegom (EN 1991-1-3:2003+AC:2009) + nacionalni dodatak.*
13. HRN EN 1991-1-4:2012, Eurokod 1. *Djelovanja na konstrukcije -- Dio 1-4: Opća djelovanja – Djelovanja vjetra (EN 1991-1-4:2005+AC:2010+A1:2010) + nacionalni dodatak.*

